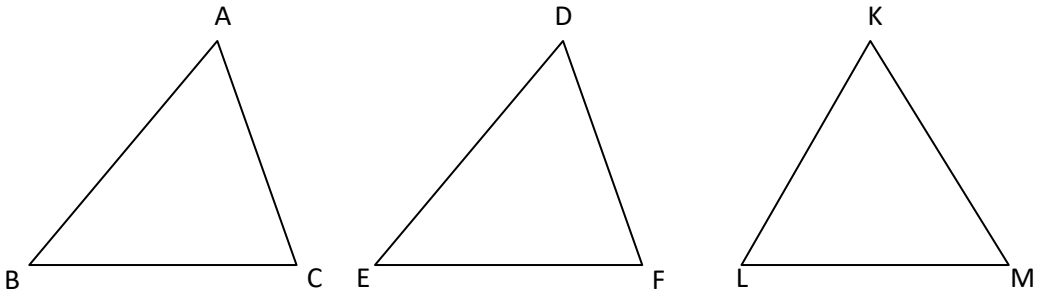
مثلثات متطابقة، متوسط في المثلّث ومثلّث متساوي الساقين
(14 ساعة)

شكلان يدعيان متطابقان **إذا استطعنا أن نضع الواحد على الأخر، بحيث يغطيه بالضبط (لذلك يمكن إزاحة، تدوير وقلب الأشكال).**

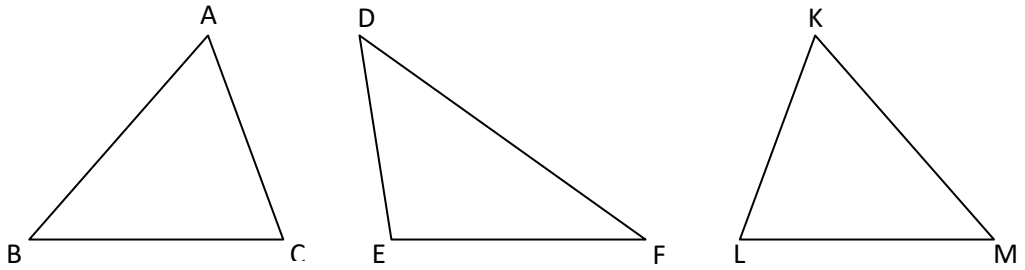
تعلّم

نتركز في هذا الفصل حول المثلثات المتطابقة.

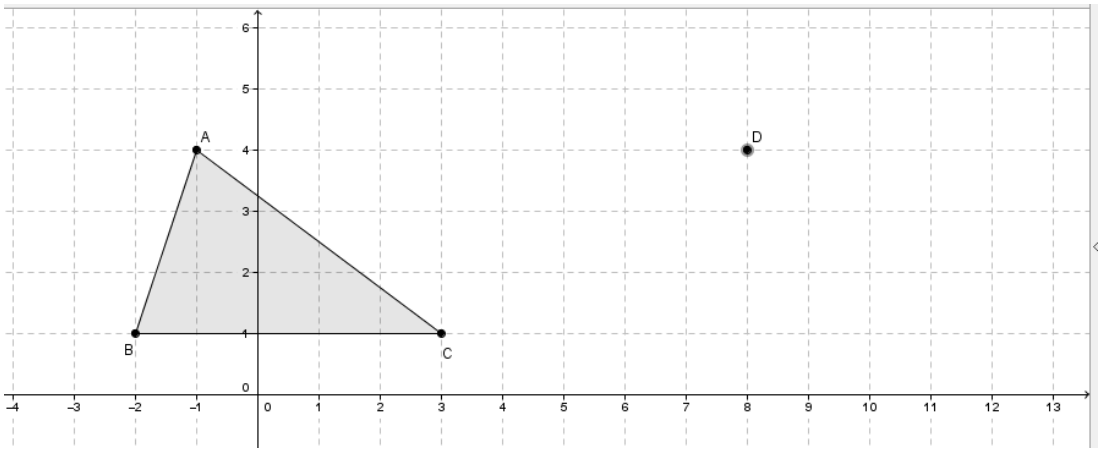
1. انسخوا المثلّث ABC على ورقة شفّافة وافحصوا أي من المثلّثين DEF أو KLM يطابق المثلّث.



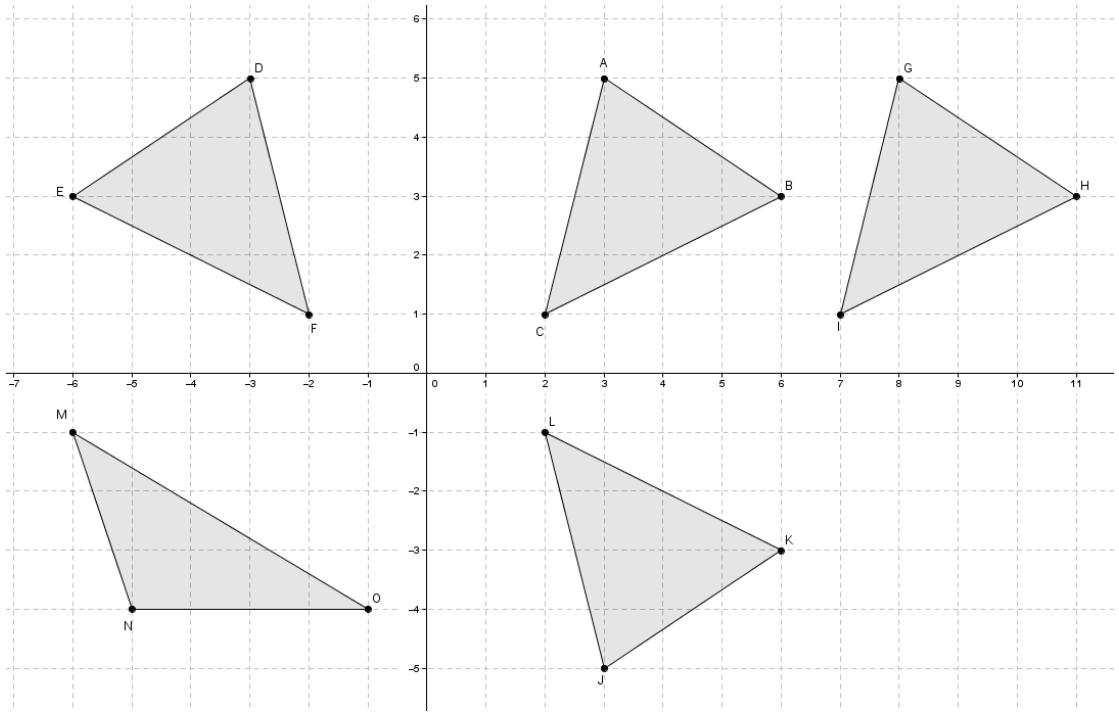
2. استعينوا بنسخ المثلّثين DEF و- KLM على ورقة شفّافة وافحصوا أيّ من المثلّثين يطابق المثلّث ABC.



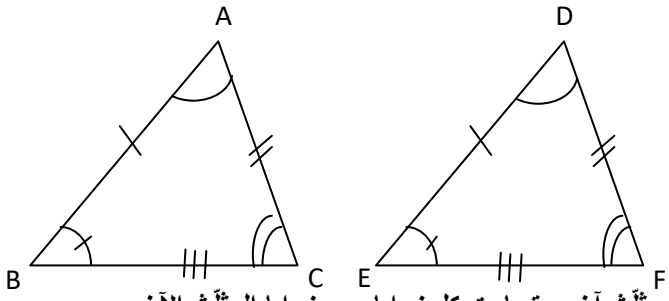
3. أ. ارسموا في هيئة المحاور مثلّث يطابق المثلّث ABC بحيث يكون أحد رؤوسه في النقطة D.
ب. كم مثلّثا كهذا من الممكن أن نرسم؟



4. في هيئة المحاور أمامكم رسومات لمثلّثات، أي مثلثات تطابق المثلّث ABC؟



اذا تطابق المثلّثين ABC و- DEF، فانّ الكتابة المتّبعة لرمز التطابق هي: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.
في المثلّثات المتطابقة كل الأضلاع المتناظرة متساوية والزوايا المتناظرة متساوية.



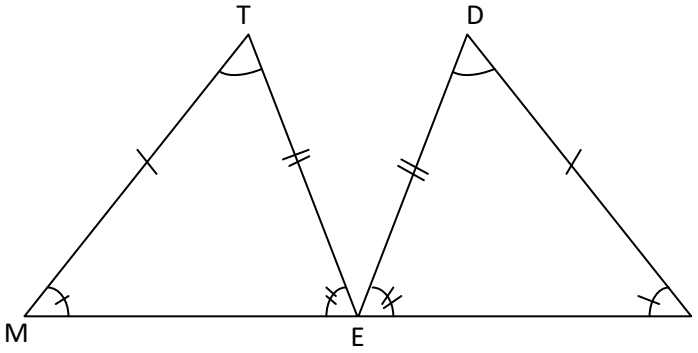
AB = DE
AC = DF
BC = EF
$\measuredangle A = \measuredangle D$
$\measuredangle B = \measuredangle E$
$\measuredangle C = \measuredangle F$

وعلى العكس، إذا تساوت كل أضلاع مثلّث مع أضلاع مثلّث آخر وتساوت كل زواياه مع زوايا المثلّث الآخر، فانّ المثلثين متطابقان.

من المتّبع تسجيل المثلّثان بحسب تناظر الرؤوس.

تمرّن

1. E منتصف القطعة MF. بواسطة المعطيات المشار اليها في الرسم فسّروا لماذا يتطابق المثلّثان وسجّلوا التطابق بكتابة رياضيّة.



أمثلة لتمارين محلولة:

الحل:

ME = EF (معطى E منتصف القطعة MF)

TE = DE، TM = DF (معطى)

∢F = ∢M،∢D = ∢T ، ∢TEM = ∢DEF (معطى)

⇓

ΔTME ≅ ΔDFE

2. AB و- CD قطعتان تتقاطعان في النقطة E بحيث ينتج مثلثان مسجّلة أطوال أضلاعهما على الرسم.
معطى أيضًا: AC || BD.
فسّروا لماذا يتطابق المثلثين في الرسم وسجّلوا التطابق بكتابة رياضيّة.

الحل:

AE = EB، AC = BD، CE = ED (معطى)

AC || BD (معطى)

⇓

∢A = ∢B ، ∢C = ∢D

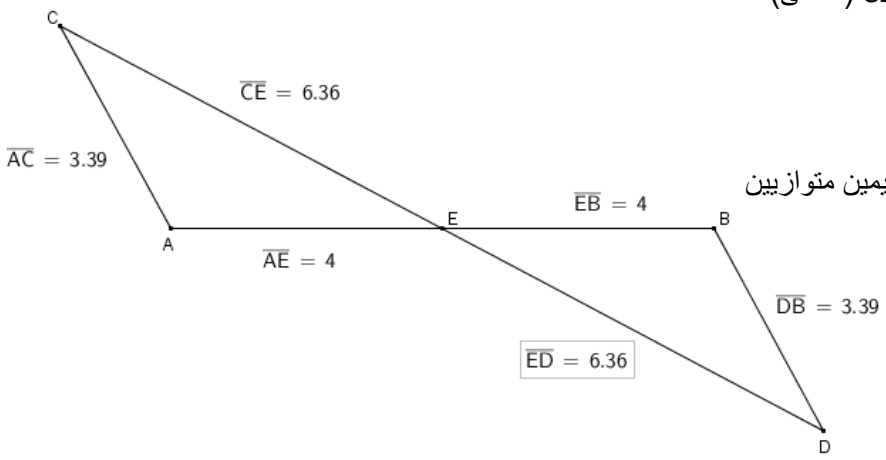
(زوايا متبادلة متساوية بين مستقيمين متوازيين

∢CEA = ∢BED

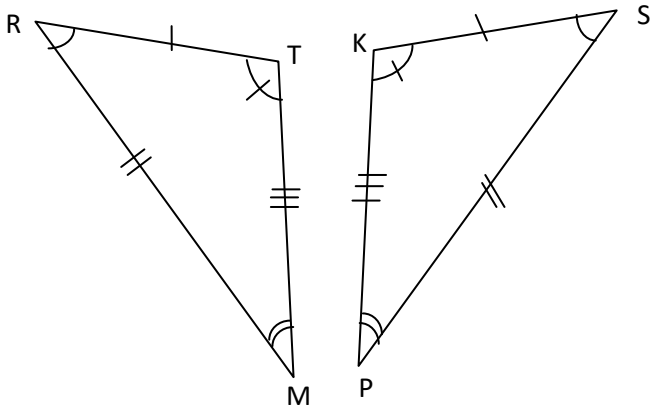
(زوايا متقابلة بالرأس متساوية)

⇓

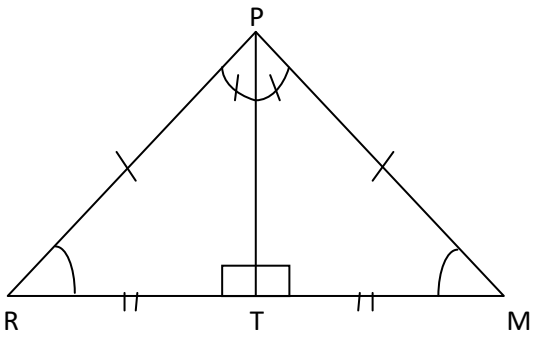
ΔACE ≅ ΔBDE



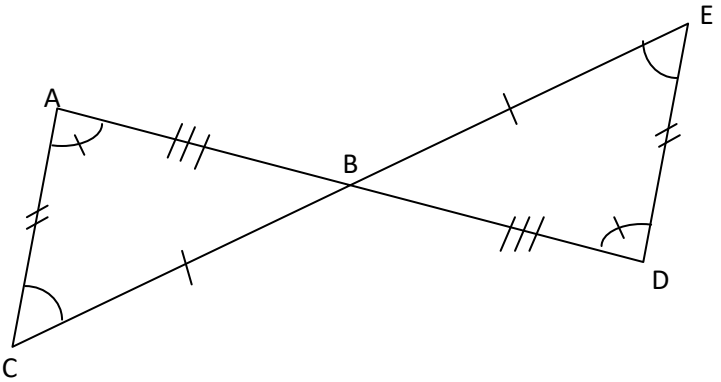
3. حسب المعطيات المشار إليها في الرسم فسّروا لماذا يتطابق المثلّثين وسجّلوا التطابق بكتابة رياضية.



4. حسب المعطيات المشار إليها على الرسم فسّروا لماذا يتطابق المثلّثين وسجّلوا التطابق بكتابة رياضية.

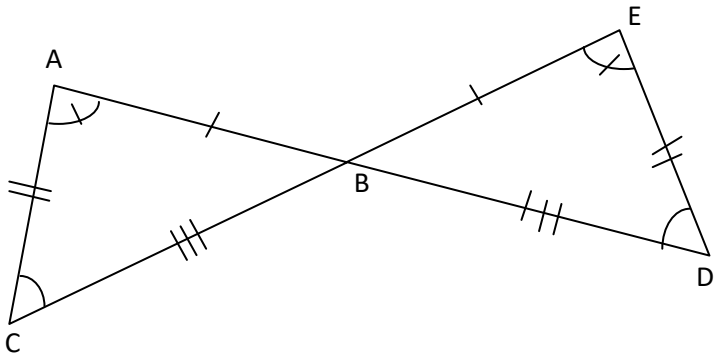


5. تتقاطع القطعتان AD و- EC في النقطة B. حسب المعطيات المشار إليها في الرسم فسّروا لماذا يتطابق المثلّثين وسجّلوا التطابق بكتابة رياضية.

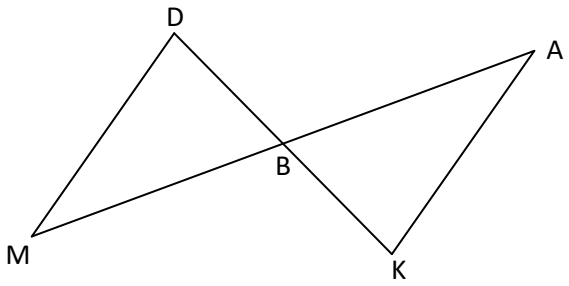


6. تتقاطع القطعتان AD و- EC في النقطة B. حسب المعطيات على الرسم فسّروا لماذا يتطابق المثلّثين وسجّلوا التطابق بكتابة رياضية.

انتبهوا للفرق بين تمرين 5 وتمرين 6.



7. تتقاطع القطعتان AM وDK - في النقطة B.

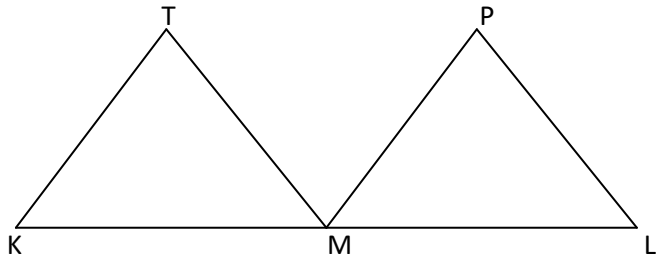


DM || AK

B منتصف AM، B منتصف DK، AK = MD

سجّلوا المعطيات على الرسم، فسّروا لماذا يتطابق المثلّثين وسجّلوا التطابق بكتابة رياضية.

8. KM خط مستقيم.



M منتصف KL

TK = PM

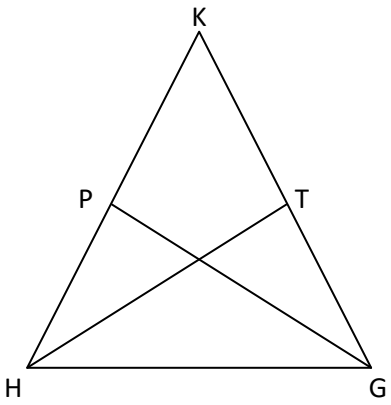
TM = PL

∢T = ∢P

TM || PL ،TK || PM

سجّلوا المعطيات على الرسم، فسّروا لماذا يتطابق المثلّثين وسجّلوا التطابق بكتابة رياضية.

بنك التفسيرات: ضلع مشترك، زوايا متقابلة بالرأس متساوية، زاوية مشتركة، زوايا متناظرة متساوية بين مستقيمين متوازيين، زوايا متبادلة متساوية بين مستقيمين متوازيين، قطعة مشتركة.



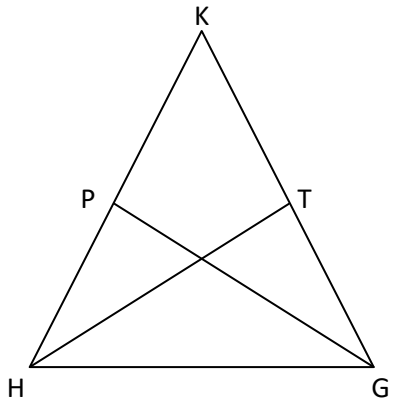
9. معطى مثلّث KHG. PH = TG ،PG = TH

$\measuredangle H = \measuredangle G$

HT، GP هما منصّفي الزاويتين H و- G على التناظر.

سجّلوا المعطيات على الرسم، حدّدوا أيّ مثلثات متطابقة،

فسّروا لماذا يتطابق المثلثين وسجّلوا التطابق بكتابة رياضية.

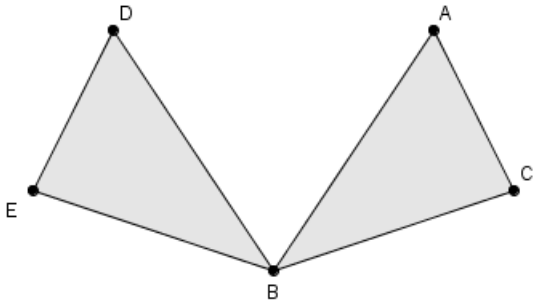


10. معطى مثّلث KHG. KP = KT ،PG = TH ،KH = KG

$\measuredangle KPG = \measuredangle KTH$.

سجّلوا المعطيات على الرسم، حدّدوا أيّ مثلثات متطابقة،

فسّروا لماذا يتطابق المثلثان وسجّلوا التطابق بكتابة رياضية.



11. معطى: $\Delta ABC \cong \Delta DBE$ على التناظر.

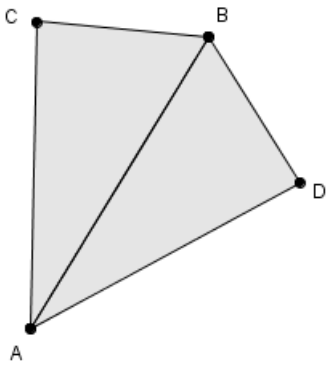
أ. سجّلوا ثلاثة أزواج من الأضلاع المتساوية.

ب. سجّلوا ثلاثة أزواج من الزوايا المتساوية.

12. معطى: $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ على التناظر.

أ. سجّلوا ثلاثة أزواج من الزوايا المتساوية.

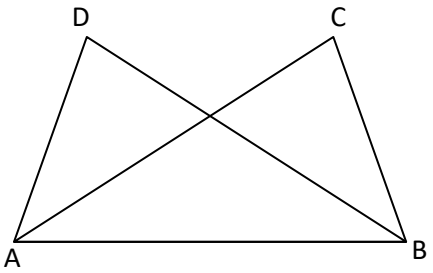
ب. سجّلوا زوجين من الأضلاع المتساوية– انتبهوا، الضلع AB ضلع مشترك للمثلّثين.



13. معطى: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ على التناظر.

أ. سجّلوا ثلاثة أزواج من الزوايا المتساوية.

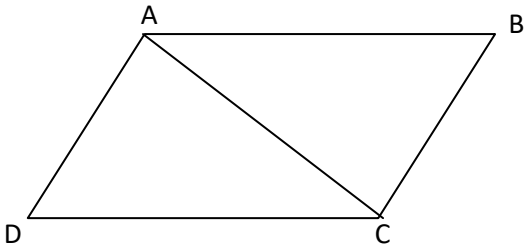
ب. سجّلوا زوجين من الأضلاع المتساوية– انتبهوا، الضلع AB ضلع مشترك للمثلّثين.



14. معطى: $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ على التناظر.

أ. سجّلوا ثلاثة أزواج من الزوايا المتساوية.

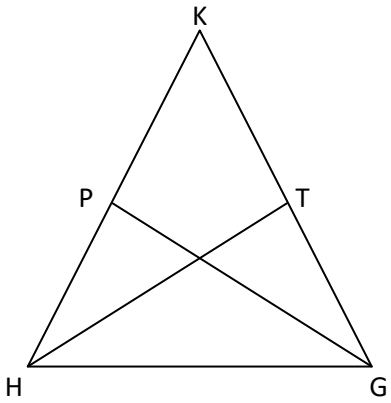
ب. سجّلوا زوجين من الأضلاع المتساوية– انتبهوا، الضلع AC ضلع مشترك للمثلّثين.



15. معطى: $\Delta KPG \cong \Delta KTH$ على التناظر.

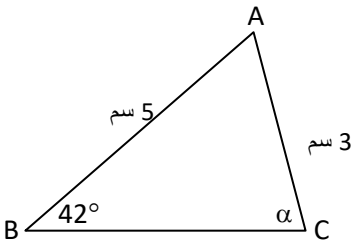
أ. سجّلوا ثلاثة أزواج من الزوايا المتساوية.

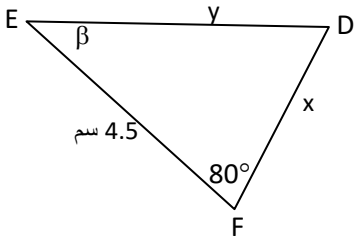
ب. سجلوا زوجين من الزوايا المتساوية – انتبهوا، الزاوية K هي زاوية مشتركة للمثلّثين.



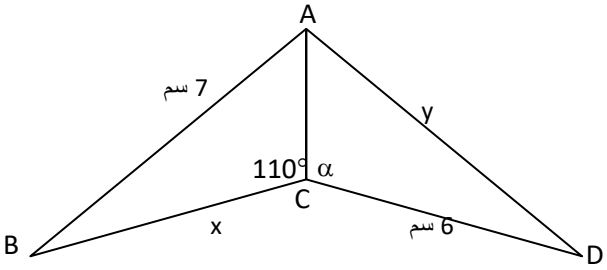
16. في البنود التالية جدوا مقدار الأضلاع والزوايا المشار إليها بـ (x, y, α, β) بناءًا على التطابق:

أ. معطى: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ على التناظر.

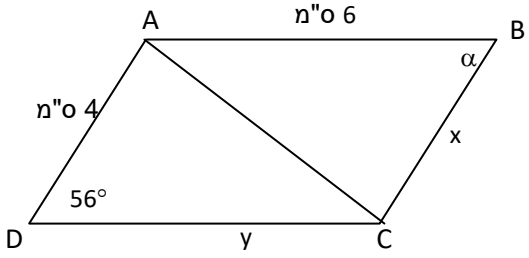




ب. معطى: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ على التناظر.



ت. معطى: $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ على التناظر.



نعود ونتذكّر....

17. معطى: 5 سم = AB، 3 سم = BC ، أي من الأطوال التالية من الممكن أن تلائم الضلع AC حتى نحصل على مثلّث ABC؟ فسّروا.

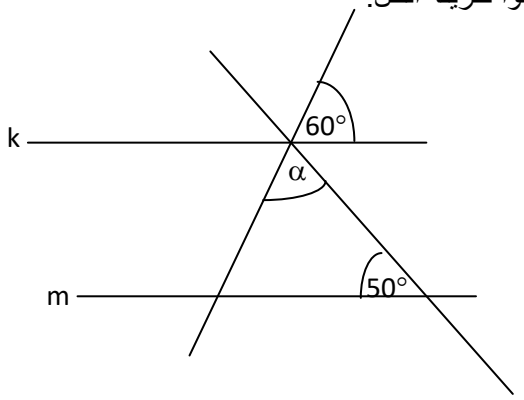
أ. 7 سم ب. 8 سم ت. 8.5 سم ث. 9 سم

18. معطاة الزوايا: $\sphericalangle ABC = 70°$، $\sphericalangle ACB = 60°$. أي مما يلي من الممكن أن يلائم مقدار الزاوية $\sphericalangle BAC$ حتى نحصل على مثلّث ABC؟ فسّروا.

أ. $80°$ ب. $70°$ ت. $60°$ ث. $50°$

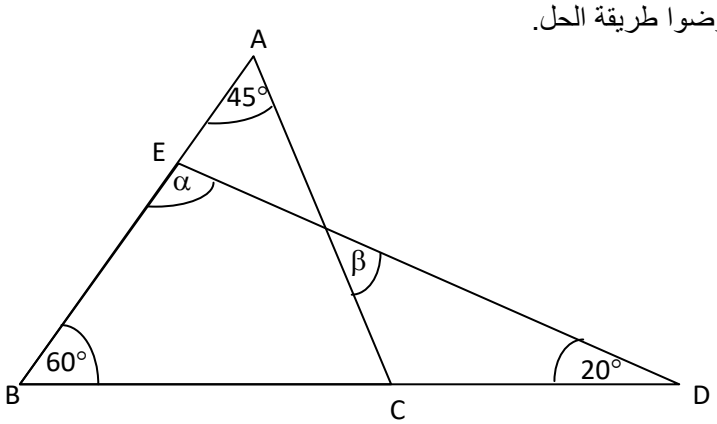
19. في مثلّث قائم زاوية إحدى الزوايا الحادة مقدارها $20°$. ما هو مقدار الزاوية الحادة الأخرى؟

20. معطى: $k \parallel m$. احسبوا مقدار الزاوية α. اعرضوا طريقة الحل.



21. امامكم شكل مكوّن من 4 قطع مستقيمة: AB، AC، BD، ED

أ. احسبوا مقدار الزاوية α. اعرضوا طريقة الحل.



ب. ما هو مقدار الزاوية β؟

I. $20°$

II. $45°$

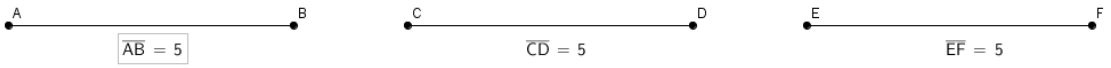
III. $55°$

IV. $60°$

هل من الممكن الاكتفاء بشروط أقل حتى نبرهن أنّ المثلّثين متطابقين؟

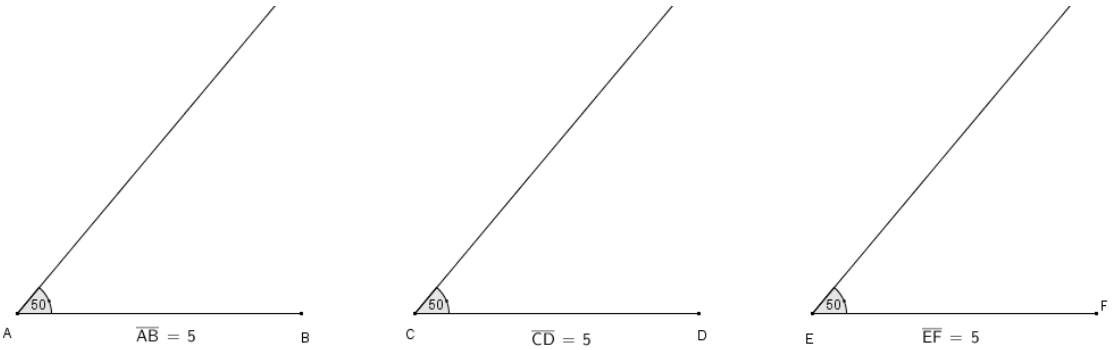
تعلّم

1. ارسموا ثلاثة مثلّثات غير متطابقة بحيث يكون أحد الأضلاع في كل مثلّث طوله 5 سم: مثلّث ABK، مثلّث CDM، مثلّث EFL



استنتاج: مساواه في معطى واحد – ضلع واحد لا يؤكّد الحصول على مثلّثين متطابقة.

2. ارسموا ثلاثة مثلّثات غير متطابقة بحيث يكون طول أحد الأضلاع في كل مثلّث هو 5 سم وإحدى الزوايا مقدارها °50: مثلّث ABK، مثلّث CDM، مثلّث EFL.

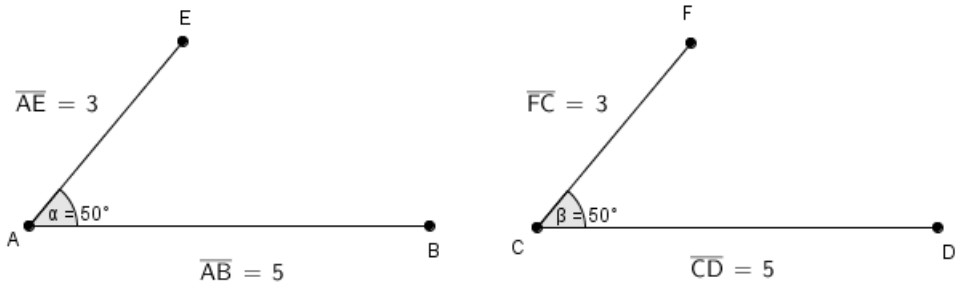


استنتاج: مساواه في معطيين – ضلع واحد وزاوية واحدة لا تؤكد الحصول على مثلثات متطابقة.

3. استعينوا بالمنقلة، وارسموا ثلاثة مثلّثات غير متطابقة مع بعضها بحيث يكون في كل مثلّث 3 زوايا: زاوية واحدة مقدارها °50، زاوية ثانية مقدارها °60 وزاوية ثالثة مقدارها °70.

استنتاج: تساوي ثلاث معطيات والتي هي زوايا لا يؤكّد الحصول على مثلّثات متطابقة.

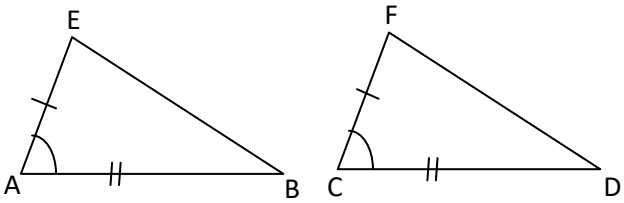
4. ارسموا مثلّثان AEB و- CFD بحيث يكون في كل مثلّث ضلع مقداره 5 سم، ضلع آخر مقداره 3 سم وزاوية بينهما مقدارها 50°:



انسخوا على ورقة شفّافة أحد المثلّثين وضعوه على المثلّث الثاني:
ماذا يمكنكم القول عن المثلّثين؟ _____

ثلاثة معطيات – **ضلعان وزاوية محصورة بينهما** – تؤكد الحصول على مثلّث ولذلك فأنّ المثلّثين اللذين حصلنا عليهما– يطابقان بعضهما.

تطابق حسب ضلعين وزاوية محصورة بينهما (ض.ز.ض): إذا تساوى ضلعا مثلّث مع ضلعي مثلّث آخر، وتساوت الزاويتان المحصورتان بينهما ، تطابق المثلّثين.



بكتابة رياضية:

AE = CF (معطى)

AB = CD (معطى)

∢A = ∢C (معطى)

⇓

ΔAEB ≅ ΔCFD حسب نظرية التطابق ض.ز.ض.

نتج من التطابق: EB = FD، ∢E = ∢F، ∢B = ∢D

في مثلّثات متطابقة مقابل أضلاع متساوية زوايا متساوية ومقابل زوايا متساوية أضلاع متساوية.

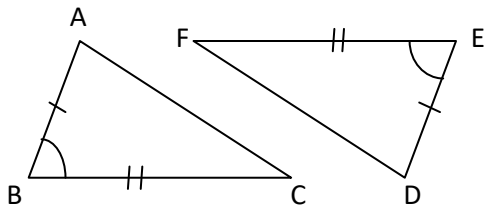
https://sites.google.com/site/mathamakimtavor/zelazavitzela

تمرين

1. أمامكم أزواج من المثلّثات المتطابقة.
جزء من المعطيات مشار إليها في الرسم وجزء منها بكتابة رياضية.
سجّلوا:
- ثلاثة معطيات تبرهن أنّ المثلّثين متطابقان حسب نظرية التطابق ض.ز.ض.
- المثلّثات المتطابقة بحيث تكون الرؤوس على التناظر.
- سجّلوا أزواج الأضلاع المتساوية وأزواج الزوايا المتساوية.

مثال

أ. معطى:



$DE = AB$

$EF = BC$

$\measuredangle E = \measuredangle B$

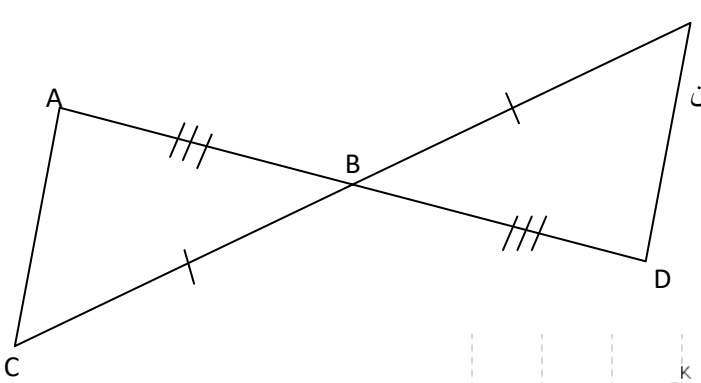
$\Downarrow$

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (حسب نظرية التطابق ض.ز.ض)

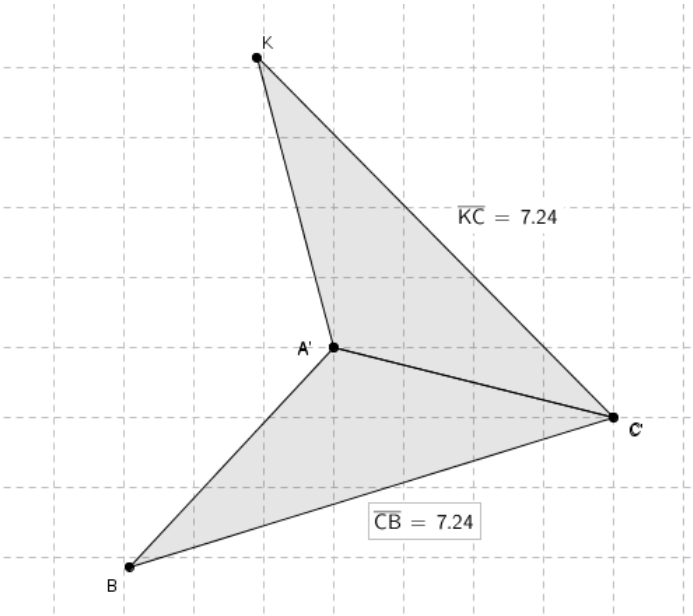
$\Downarrow$

$FD = AC$، $\measuredangle D = \measuredangle A$ ، $\measuredangle C = \measuredangle F$ (في مثلثات متطابقة مقابل أضلاع متساوية زوايا متساوية والعكس صحيح)

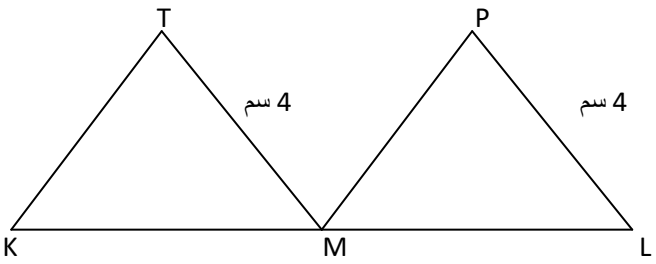
ب. معطى: AD و- CE قطعتان مستقيمتان تتقاطعان في النقطة B.



ت. معطى AC منصّف زاوية KCB



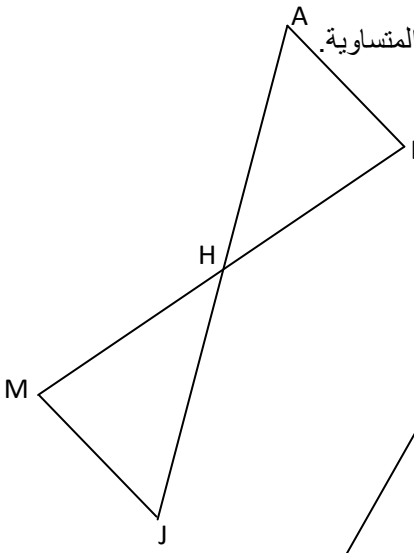
ث. معطى: M منتصف KL
TM || PL



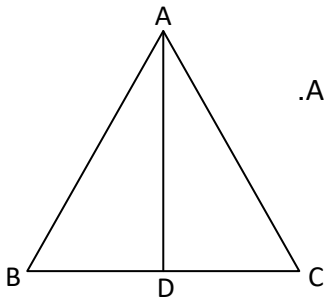
2. أمامكم أزواج من المثلثات المتطابقة.
جزء من المعطيات مشار إليها على الرسم وجزء منها معطى بكتابة رياضية.
سجّلوا:

- ثلاثة معطيات تبرهن أنّ المثلّثين متطابقين حسب نظرية التطابق ض.ز.ض.
- المثلّثات المتطابقة بحيث تكون الرؤوس على التناظر.
- سجّلوا كل الأزواج الإضافية من الأضلاع المتساوية والزوايا المتساوية.

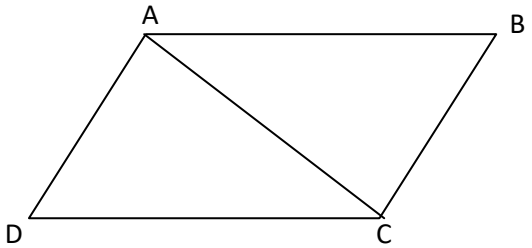
أ. معطى: AJ و- MB قطعتان مستقيمتان تتقاطعان في النقطة H.
النقطة H منتصف القطعة AJ ومنتصف القطعة MB



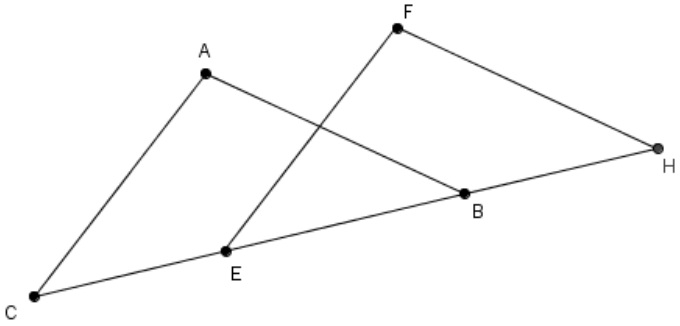
ب. معطى: في المثلّث ABC: AB = AC، AD منصّف الزاوية A.



ت. معطى: AB || CD، AB = CD

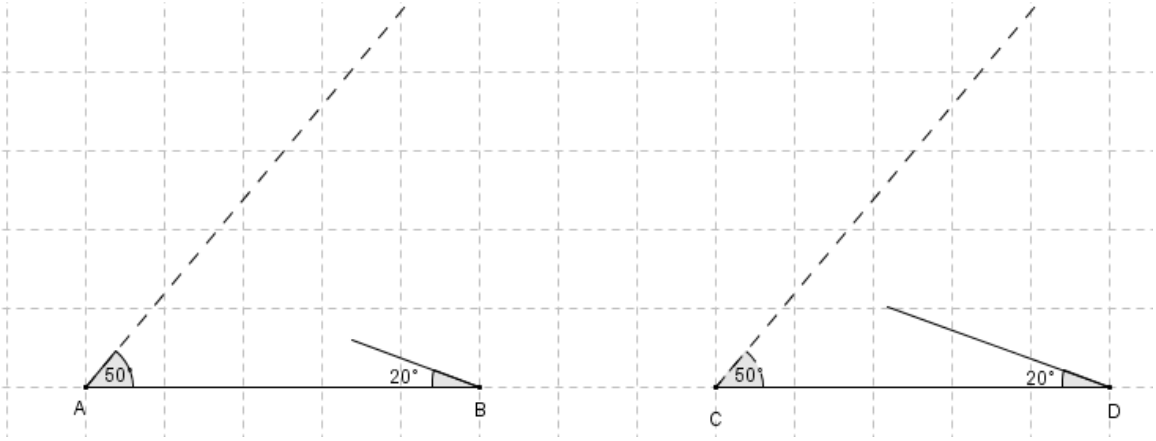


ث. معطى: AC || EF، AC = FE، CE = BH



تعلّم

ارسموا المثلّثين AEB و- CFD بحيث أن في كل مثلث زاوية واحدة مقدارها °50، زاوية أخرى مقدارها °20 والضلع المحصور بينهما طوله 5 سم:

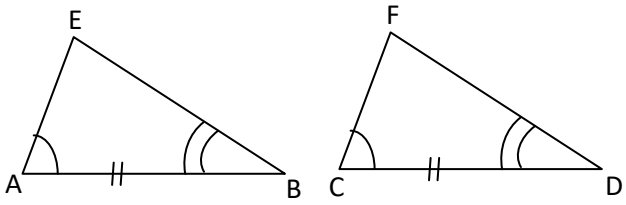


انسخوا على ورقة شفّافة أحد المثلّثين وضعوه على المثلّث الثاني.
ماذا يمكنك القول عن المثلّثين؟_____

ثلاثة معطيات – **زاويتان وضلع محصور بينهما** – تؤكد الحصول على مثلّث واحد ولذلك فأنّ المثلّثين الناتجين- متطابقين.

تطابق حسب زاويتين وضلع محصور (ز.ض.ز): إذا تساوت زاويتان في مثلّث مع زاويتين في مثلث آخر، وتساوى الضلعان المحصوران بين الزاويتين، تطابق المثلّثان.

بكتابة رياضية:



AB = CD (معطى)

∢A = ∢C (معطى)

∢B = ∢D (معطى)

⇓

ΔAEB ≅ ΔCFD حسب نظرية التطابق ض.ز.ض.

نتج من التطابق: AE = CF، EB = FD، ∢E = ∢F

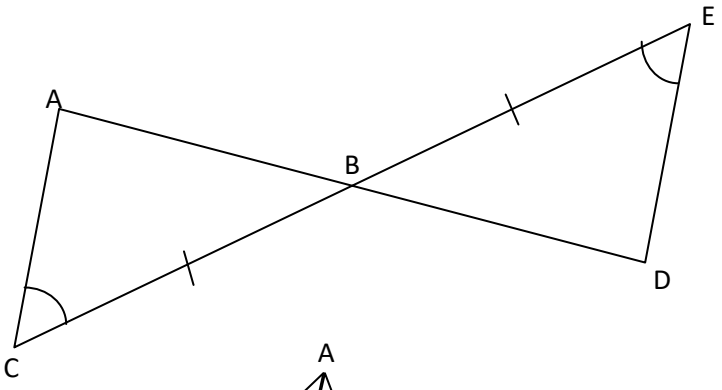
في مثلّثات متطابقة تقابل أضلاعا متساوية زوايا متساوية وتقابل زوايا متساوية أضلاعا متساوية.

https://sites.google.com/site/mathamakimtavor/zavitzelazavit

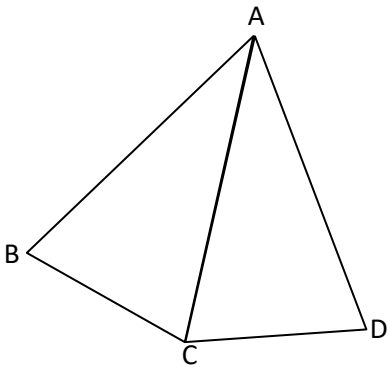
تمرّن

3. أمامكم أزواج من المثلّثات المتطابقة.
جزء من المعطيات مشار إليها على الرسم وجزء منها معطى بكتابة رياضية.
سجّلوا:
ثلاثة معطيات تبرهن أنّ المثلّثين متطابقين حسب نظرية التطابق ز.ض.ز.
- المثلّثات المتطابقة بحيث تكون الرؤوس على التناظر.
- سجّلوا أزواج الأضلاع المتساوية وأزواج الزوايا المتساوية.

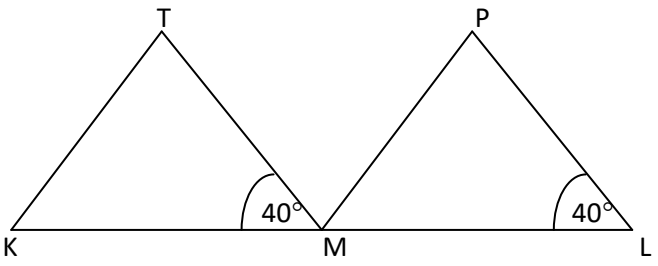
أ. معطى: AD ⊥ CE
قطعتان مستقيمتان تتقاطعان في النقطة B.



ب. معطى: AC منصّف زاوية A ومنصّف زاوية C

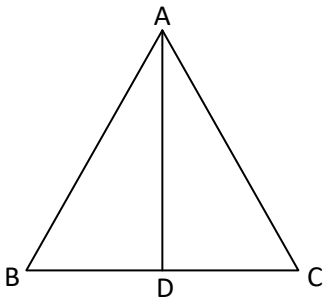


ث. معطى: M منتصف القطعة KL
$\measuredangle TKM = \measuredangle PML$

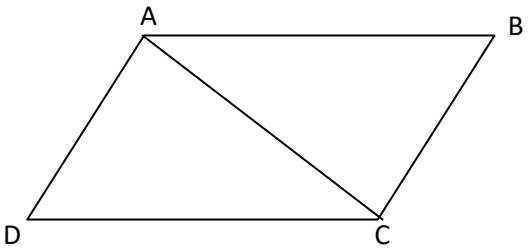


4. أمامكم أزواج من المثلّثات المتطابقة.
جزء من المعطيات مشار إليها على الرسم وجزء منها معطى بكتابة رياضية.
سجّلوا:
- ثلاثة معطيات تبرهن أنّ المثلّثين متطابقين حسب نظرية التطابق ز.ض.ز.
- المثلّثات المتطابقة بحيث تكون الرؤوس على التناظر.
- سجّلوا أزواج الأضلاع المتساوية وأزواج الزوايا المتساوية.

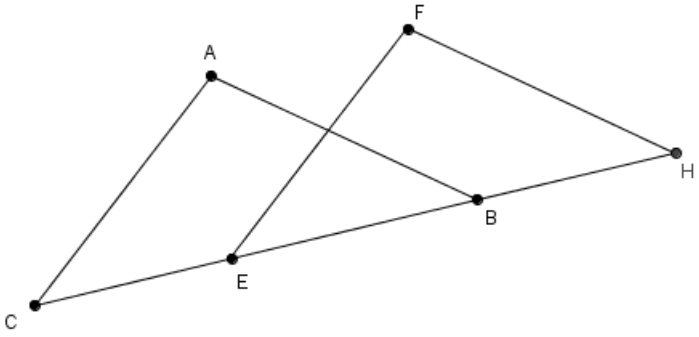
أ. معطى: $AD \perp BC$، AD منصّف زاوية A.



ب. معطى: $AB \parallel CD$، $BC \parallel AD$

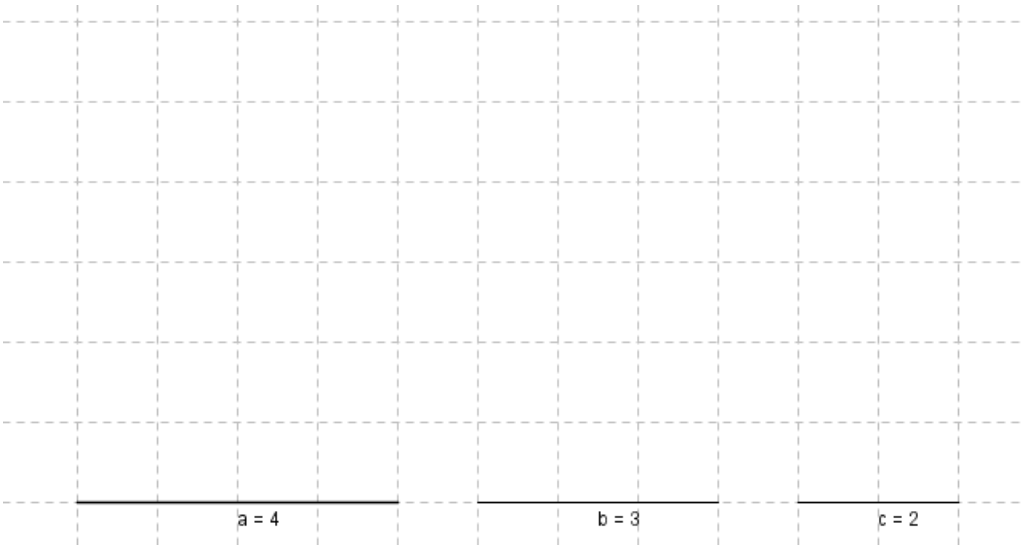


ت. معطى: $AC \parallel EF$، $AB \parallel FH$، $CE = BH$



تعلّم

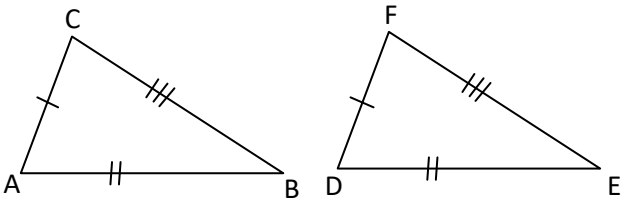
معطاة أطوال ثلاثة أضلاع في مثلث: a، b ، c.
ارسم مثلّثين ABC و- DEF بحيث تكون أضلاع المثلّث هي الأضلاع المعطاة:



انسخوا على ورق شفّاف أحد المثلّثات وضعوه على المثلّث الثاني.
ماذا يمكنكم القول عن المثلّثين؟ _____

ثلاثة معطيات – **ثلاث أضلاع** - تؤكد الحصول على مثلّث واحد ولذلك فأنّ المثلّثين الناتجين – متطابقين.

تطابق حسب ضلع، ضلع، ضلع (ض.ض.ض.): إذا تساوت ثلاثة أضلاع في مثلّث مع ثلاث أضلاع في مثلّث آخر، فأنّ المثلثين متطابقين.



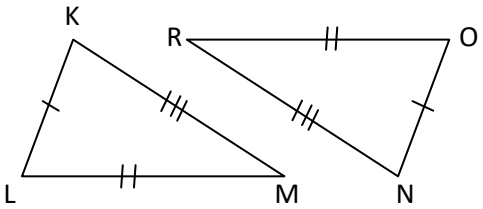
بكتابة رياضية:
AB = DE (معطى)
AC = DF (معطى)
BC = EF (معطى)
⇓
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ حسب نظرية التطابق (ض.ض.ض).
نتج من التطابق: $\measuredangle E = \measuredangle F$ ، $\measuredangle A = \measuredangle C$ ، $\measuredangle B = \measuredangle D$
في مثلّثات متطابقة مقابل أضلاع متساوية زوايا متساوية.

https://sites.google.com/site/mathamakimtavor/zelazelazela

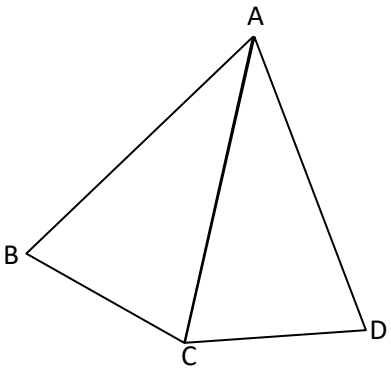
تمرّن

5. أمامكم أزواج من المثلّثات المتطابقة.
جزء من المعطيات مشار إليها على الرسم وجزء منها معطى بكتابة رياضية.
سجّلوا:
- ثلاثة معطيات تبرهن أنّ المثلّثين متطابقان حسب نظرية التطابق ض.ض.ض.
- المثلّثات المتطابقة بحيث تكون الرؤوس على التناظر.

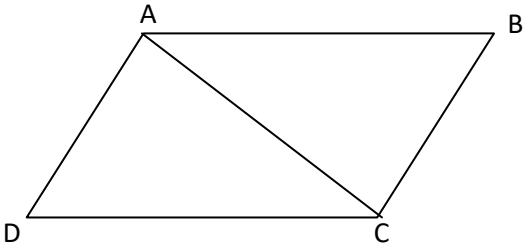
أ.



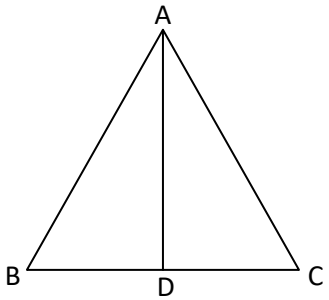
ب. معطى: AD = AB، BC = CD



ت. معطى: DC = AB، BC = AD



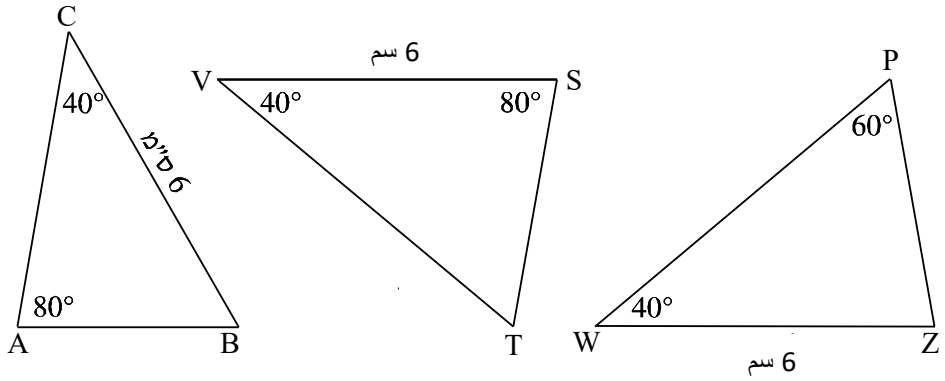
ث. D منتصف BC، AC = AB



تمرّن

تمارين مدمجة

1. **فقط لاثنين** من بين المثلثات الثلاثة التي أمامكم متطابقة.



أ. المثلّثان المتطابقان هما: _____ Δ و- _____ Δ.

ب. ما هي نظرية التطابق التي اعتمدت عليها لتطابق المثلثين في البند أ؟

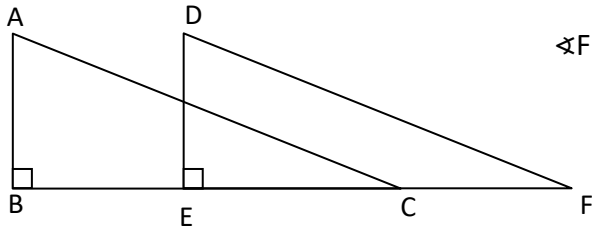
☐1 ضلع، ضلع، ضلع

☐2 ضلع، زاوية، ضلع

☐3 زاوية، ضلع، زاوية

2. المثلثان ABC و- DEF هما مثلّثان متطابقان على التناظر.

معطى: $DE \perp EF$، $AB \perp BC$، $\measuredangle F = 20°$



أ. أي من بين الزوايا التالية مساوية للزاوية F؟

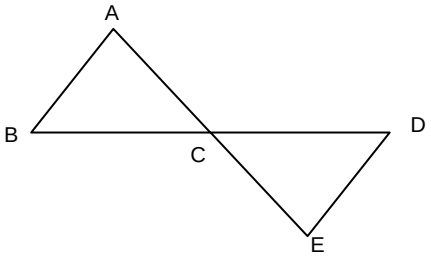
(1) $\measuredangle A$ (2) $\measuredangle D$ (3) $\measuredangle ACF$ (4) $\measuredangle ACB$

ب. احسبوا مقدار الزاوية A.

اكتبوا النظرية التي اعتمدتم عليها.

ت. احسبوا مقدار الزاوية $\measuredangle ACF$. فسّروا.

3. المثلثان ABC و-EDC متطابقان.

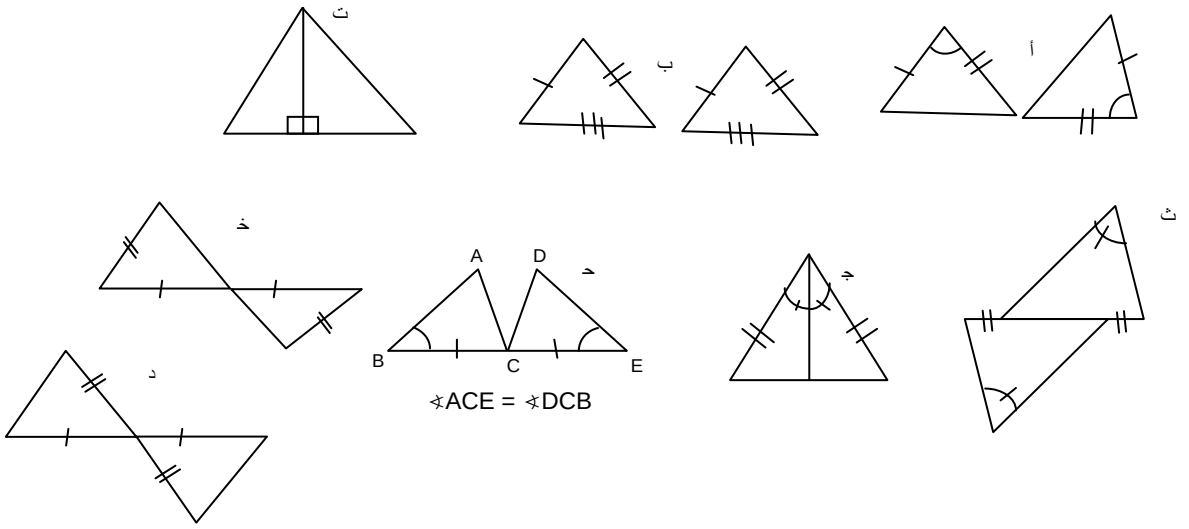


معطى: BC = CD، AB || DE

أ. أي ضلع في المثلّث EDC مساوٍ للضلع AC؟

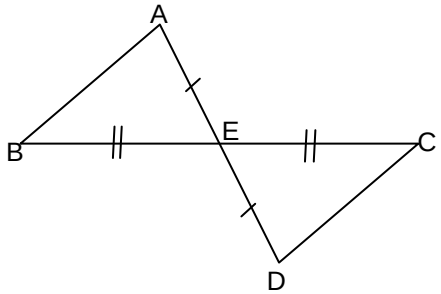
ب. هل الزاوية A مساوية للزاوية E أم للزاوية D؟ فسّروا.

4. معطاة أزواج من المثلّثات. حدّدوا في أيّ من الأزواج يتطابق المثلّثان وحسب أي نظرية (الأضلاع والزوايا المتساوية مشار إليها في الرسم). إذا لم يتطابق المثلّثان أعط مثالا مضادا مع قياسات ملموسة (بواسطة المنقلة والمسطرة):

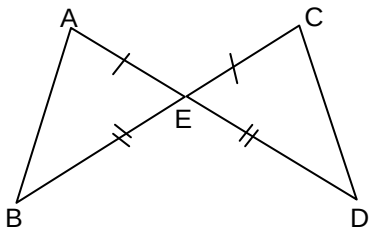


⦟ACE = ⦟DCB

5. AD و- BC قطعتان مستقيمتان متقاطعتان. في أي من الرسوم من الممكن أن نستنتج أنّ ⦟D= ⦟B؟ فسّروا.

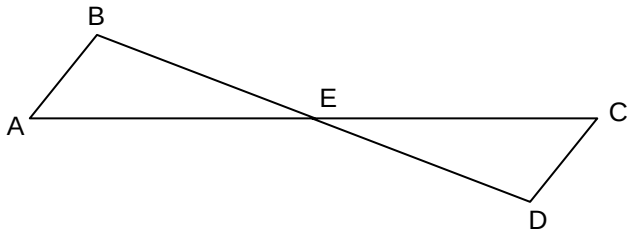


معطى: AE = CE، BE = DE



معطى: AE = DE، BE = CE

6. في الرسم التالي معطى أنّ: AC و- BD قطعتان مستقيمتان متقاطعتان، AB || DC، و- AB = DC.
فسّروا لماذا يتطابق المثلّثين ABE و- CDE.

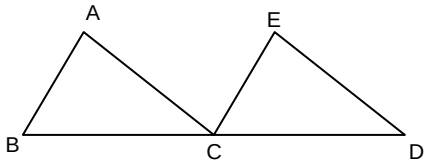


أكملوا وفسّروا:

AE = _____

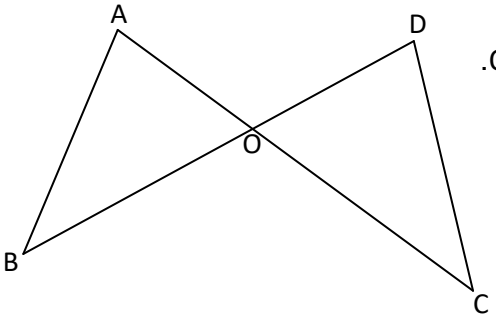
BE = _____

7. أمامكم مثلّثين: ABC و-ECD.
معطى: EC||AB، AC||ED، C منتصف القطعة BD.
حدّدوا ما إذا كان المثلثان متطابقين وان كانا كذلك،
سجّلوا نظرية التطابق واشرحوا.
إذا تطابق المثلثين أكملوا: _____ = AB، _____ = AC
فسّروا إجابتكم.



8. في الرسم أمامكم قطعتان مستقيمتان AC و- BD تتقاطعان في النقطة O.
معطى: AO = OD ، BO = OC

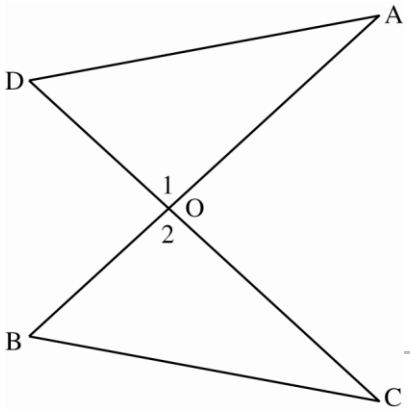
أ. أكتبوا النظرية التي حسبها يتطابق المثلّثين AOB و- DOC.



ب. أشيروا بـ –☒ بجانب الادعاء إن كان
بالتأكيد صحيح أو **ليس بالتأكيد صحيحا**.

	الادعاء	بالتأكيد صحيح	ليس بالتأكيد صحيحا
.1	DC = AB	☐1	☐2
.2	∢C = ∢A	☐1	☐2
.3	BD = AC	☐1	☐2

9. تتقاطع القطعتان المستقيمتان AB و-CD في النقطة O.



معطى: $\measuredangle A = \measuredangle C$

أ. أمامكم برهان بأنّ - $\measuredangle B = \measuredangle D$.

أكملوا التفسيرات الناقصة في البرهان.

$\measuredangle A = \measuredangle C$ معطى

$\measuredangle O_1 = \measuredangle O_2$ لانّ _____

$\Downarrow$

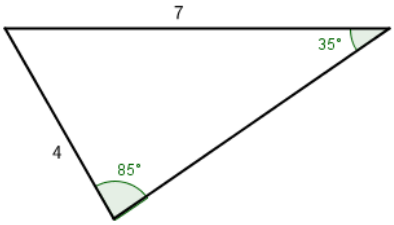
$\measuredangle B = \measuredangle D$ لانّ _____

ب. معطى أيضا أنّ: AD = BC

أكملوا:

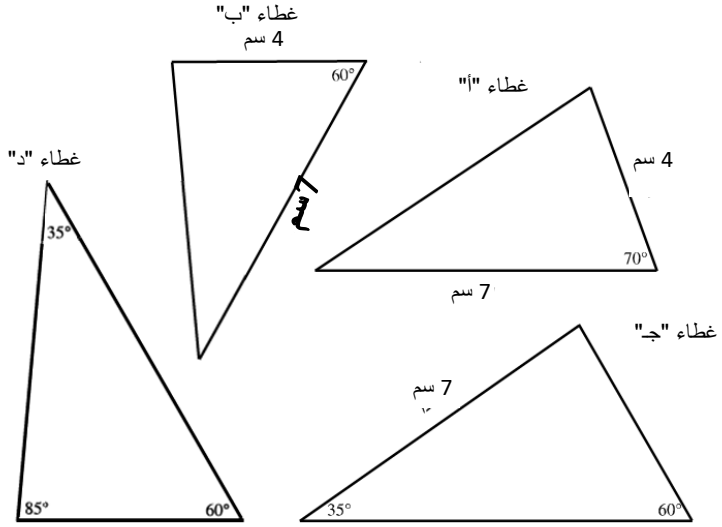
يتطابق المثلّثان AOD و- COB حسب نظرية التطابق: _____

10. أمامك قاعدة مثلّثة لعلبة حلوى:



في الرسومات التالية وصفٌ لأغطية علبة الحلوى. أي من بين الأغطية **يطابق بالتأكيد** قاعدة العلبة؟

اختاروا الغطاء المناسب حسب معطيات الرسم، وسجّلوا نظرية التطابق التي اعتمدتم عليها باختياركم.



الإجابة: الغطاء المناسب هو _____.

نظرية التطابق هي_____.

وزارة التربية
السكرتارية التربوية – قسم العلوم
التفتيش على تعليم الرياضيات

زاوية خارجية في المثلّث

تعلّم

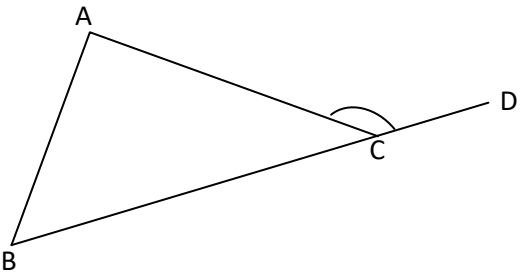
في المثلّثات "أ، ت، ث، جـ" النقطة D تقع على امتداد الضلع BC.

في المثلّث "ث" النقطة E تقع على امتداد الضلع AB.

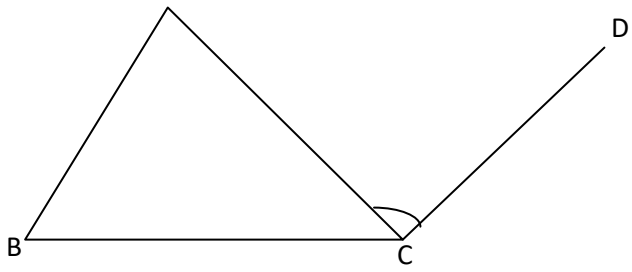
في كل واحد من المثلثات مشار إلى زاوية.

اشيروا الى المثلّثات التي فيها الزاوية المشار لها هي زاوية مجاورة لزاوية داخلية في المثلّث.

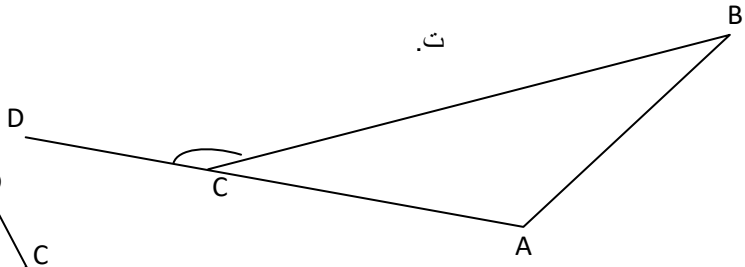
أ.



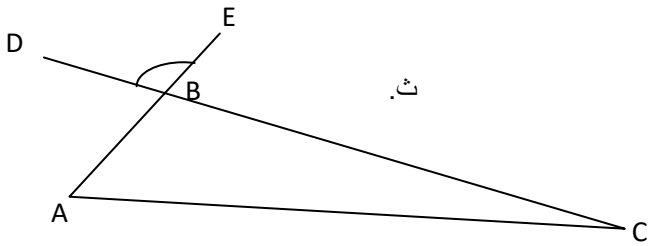
ب.



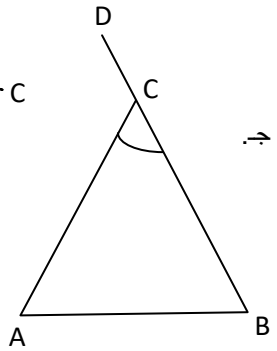
ت.



ث.



جـ.

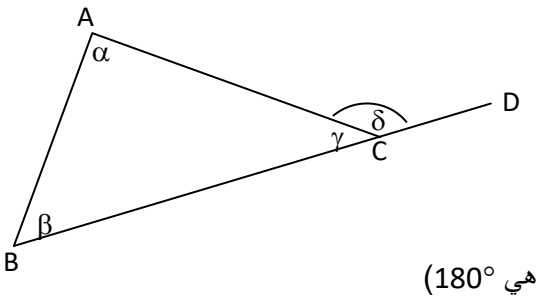


زاوية تدعى **زاوية خارجية للمثلّث** إذا كانت زاوية مجاورة مكمّلة لزاوية داخلية في المثلّث.

زاوية خارجية لمثلّث تكمّل لـ °180 الزاوية الداخلية المجاورة لها.

آدعاء: زاوية خارجية لمثلّث تكمّل لـ °180 الزاوية الداخلية المجاورة لها، ولذلك تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين لها.

برهان الادعاء:



معطى مثلّث ABC.

النقطة D تقع على امتداد الضلع BC.

δ زاوية خارجية للمثلّث ABC

يجب إثبات: $\alpha + \beta = \delta$

برهان: $\boxed{\alpha + \beta} + \gamma = 180°$ (مجموع زوايا المثلّث هي $180°$)

$\Downarrow$

$\boxed{\alpha + \beta} = 180° - \gamma$

$\boxed{\delta} + \gamma = 180°$ (مجموع الزوايا المتجاورة المتكاملة $180°$)

$\boxed{\delta} = 180° - \gamma$

$\Downarrow$

$\alpha + \beta = \delta$ (علاقة التعدّي) وهو المطلوب.

نقاش:

- ما هو عدد الزوايا الخارجية للمثلّث؟
- لأي مثلّث يوجد زاوية خارجية واحدة قائمة؟
- لأي مثلّث يوجد زاوية خارجية واحدة حادّة؟
- لأي مثلّث يوجد ثلاث زوايا خارجية منفرجة؟

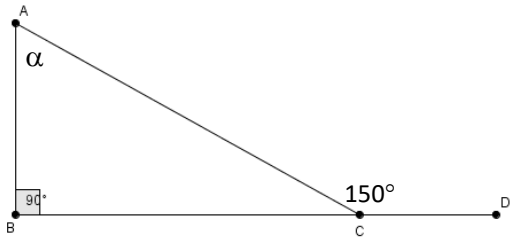
ادّعاء: الزاوية الخارجية للمثلّث تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين لها ولذلك فأنّها أكبر من كل واحدة من الزوايا الداخلية غير المجاورة لها.

فسّر لماذا الادعاء صحيح.

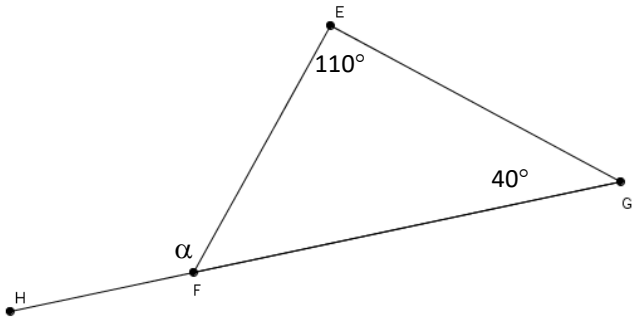
تمرّن

1. احسبوا مقدار الزاوية α في كل واحد من المثلّثات المعطاة :

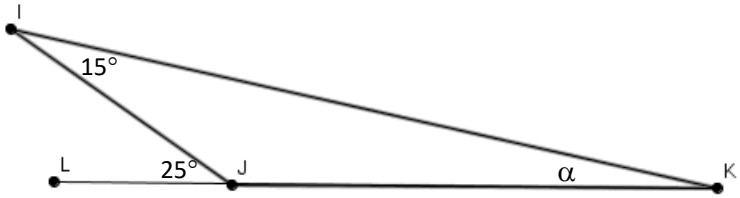
أ.



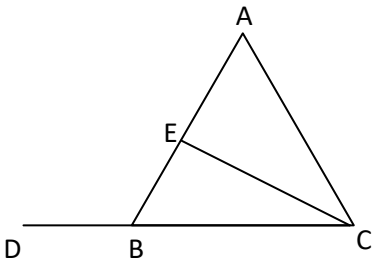
ب.



ت.



2. معطى مثلّث ABC. النقطة D تقع على امتداد BC.
النقطة E تقع على الضلع AB.



أكملوا:

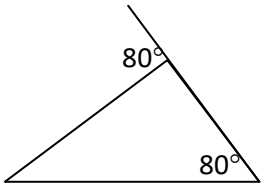
DBA∢ هي زاوية خارجية للمثلّث _____

AEC∢ هي زاوية خارجية للمثلّث _____

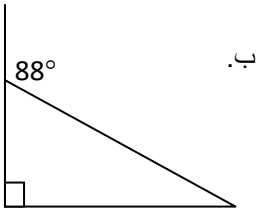
BEC∢ هي زاوية خارجية للمثلّث _____

3. فسروا لماذا المعطيات في كل واحدة من الرسومات غير ممكنة:

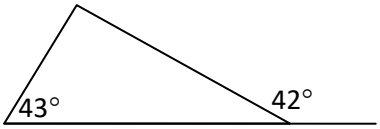
أ.



ب.



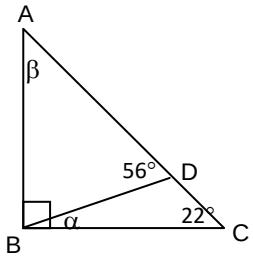
ت.



4. معطى مثلث قائم زاوية ABC. D نقطة على الضلع AC.

أ. احسبوا مقدار الزاوية α، β حسب المعطيات على الرسم.

ب. فسّروا كل مرحلة في الحساب.

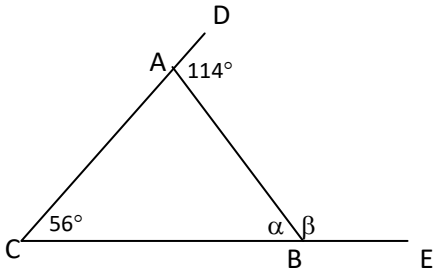


5. معطى مثلّث ABC. D نقطة علو امتداد الضلع AC.

E نقطة على امتداد الضلع CB

أ. احسبوا مقدار الزاويتين α، β حسب المعطيات على الرسم.

ب. فسّروا كل مرحلة في الحساب.

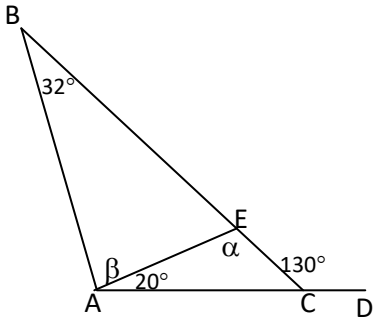


6. معطى مثلّث ABC. D نقطة على امتداد الضلع AC.

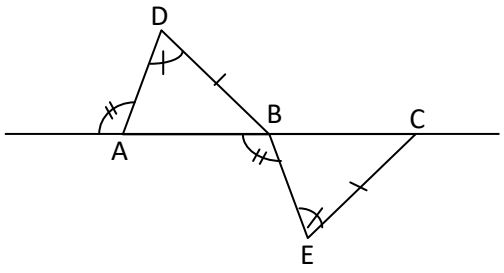
E نقطة على الضلع CB

أ. احسبوا مقدار الزاوية α، β حسب المعطيات على الرسم.

ب. فسّروا كل مرحلة في الحساب.



7. على المستقيم AC بنوا مثلثين: ABD، BEC
فسّروا بواسطة المعطيات المشار إليها في الرسم
لماذا يتطابق المثلّثين.



تعلّم

المتوسط في المثلّث

في الصف السابع تعرّفنا على مستقيمين يمرّان في المثلّث:

منصّف زاوية في المثلّث، ارتفاع في المثلّث.

منصّف زاوية هو قطعة مستقيمة تخرج من أحد رؤوس المثلّث وتنصّف الزاوية إلى قسمين متساويين.

ارتفاع هو قطعة مستقيمة أحد أطرافها هو أحد رؤوس المثلّث والطرف الآخر يقع على الضلع المقابل أو على امتداد الضلع المقابل وهو يعامد هذا الضلع.

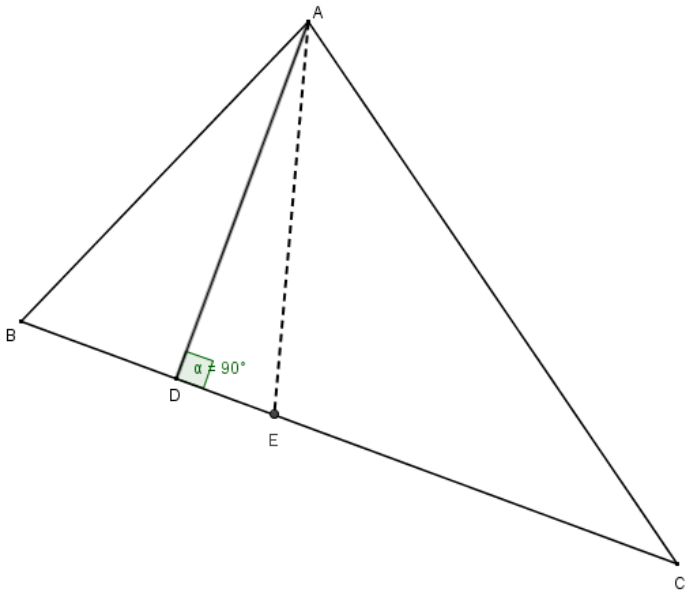
إذا كان معطى في مثلّث ABC أنّ: $AD \perp BC$

فأنّ AD ارتفاع في المثلّث.

إذا كان معطى في مثلّث ABC أنّ:

$\measuredangle BAE = \measuredangle CAE$

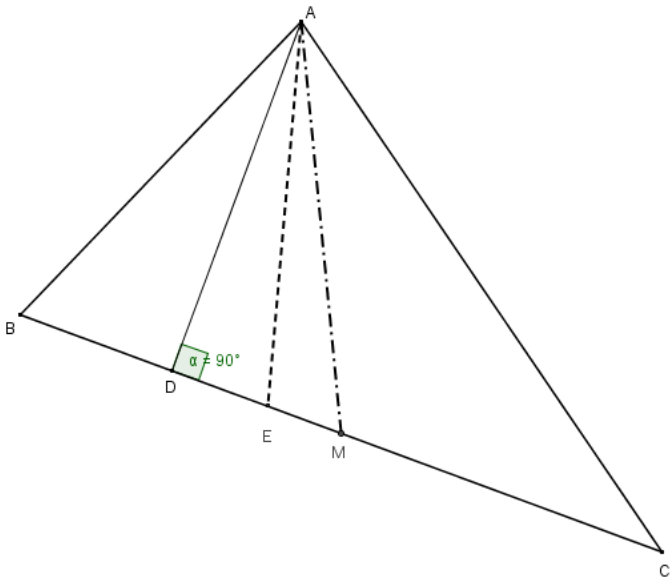
فأنّ AE منصّف الزاوية A في المثلّث.



متوسّط في المثلّث هو قطعة توصل بين رأس المثلّث مع منتصف الضلع المقابل له.

إذا كانت النقطة M منتصف الضلع BC فأنّ

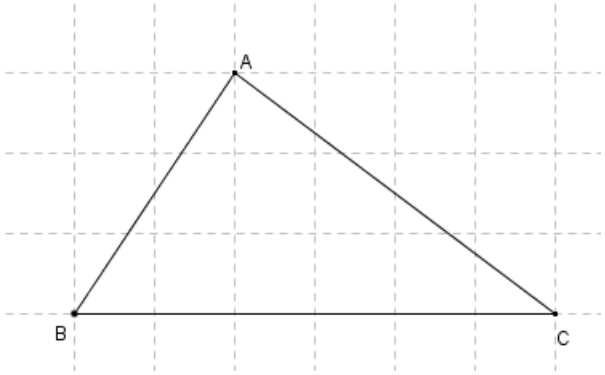
القطعة AM هي **متوسّط للضلع** BC في المثلّث ABC.



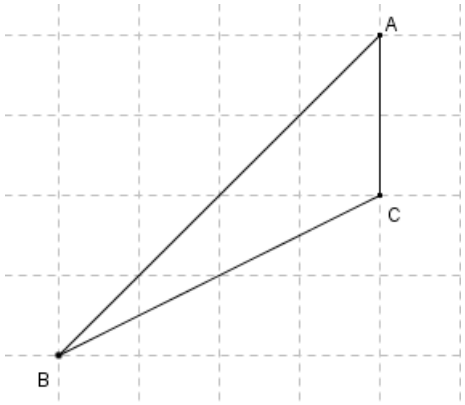
نقاش: كم متوسّطًا يوجد في المثلّث؟

تمرّن

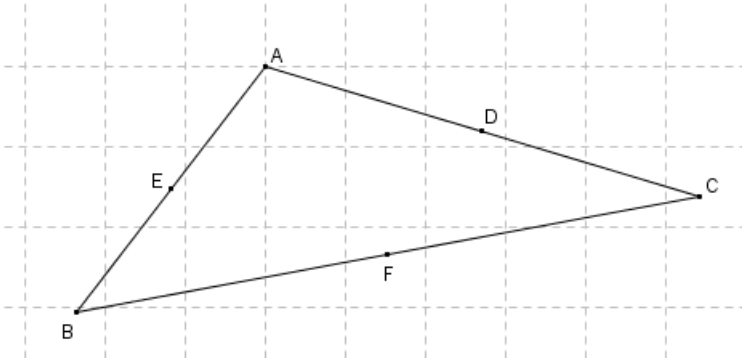
1. استعينوا بخلفية التربيعات لرسم المتوسّط على الضلع BC في المثلّث ABC.



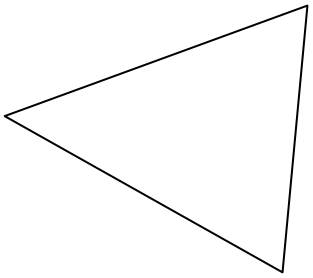
2. استعينوا بخلفية التربيعات لرسم المتوسّطين على الضلعين AC و- AB في المثلّث ABC.



3. النقاط D، E، F هي منتصفات الأضلاع AC، AB، BC على التناظر.
ارسموا المتوسطات في المثلّث.



4. قيسوا أطوال أضلاع المثلّث الذي أمامكم وارسموا المتوسطات الثلاث:

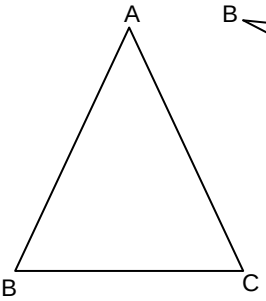


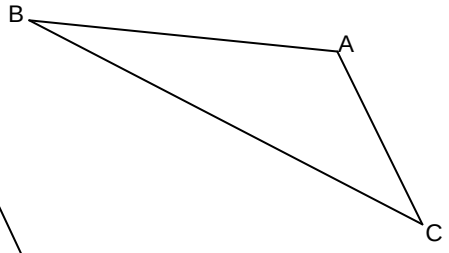
5. ارسموا بواسطة المسطرة والمنقلة القطع التالية في المثلث الذي أمامكم:

AD ارتفاع على الضلع BC.

AP منصّف الزاوية A.

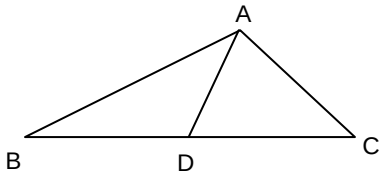
AM متوسّط على الضلع BC.





6. في المثلّث ABC، AD متوسّط على الضلع BC.

الضلع AB أكبر من الضلع AC بـ 2 سم.

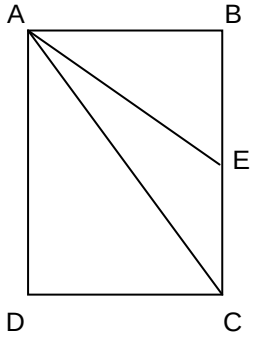


بكم سنتمتراً محيط المثلّث ABD أكبر من محيط المثلّث ADC؟ فسّروا.

لأي من المثلّثين ABD أم ADC مساحة أكبر؟ فسّروا.

استنتاج: المتوسّط يقسم المثلّث إلى مثلّثين متساويين في المساحة.

7. هل المتوسّط في المثلّث يقسم المثلّث إلى مثلّثين متطابقين؟ فسّروا.



8. في الرسم أمامكم مستطيل ABCD. AC قطر المستطيل،

و-AE متوسّط في المثلّث ABC.

أ. ما هي النسبة بين مساحة المثلّثين ABE و-ADC؟

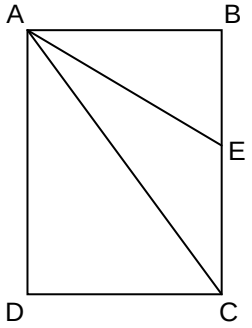
ب. أيّ جزء من مساحة المستطيل تشكّل مساحة المثلّث AEC؟

9. في الرسم أمامكم مستطيل ABCD. AC قطر المستطيل،

و-AE منصّف زاوية CAB في المثلّث ABC.

$\sphericalangle EAC = \alpha$

فسّروا **بطريقتين مختلفتين** لماذا $\sphericalangle AEB = 90° - \alpha$.

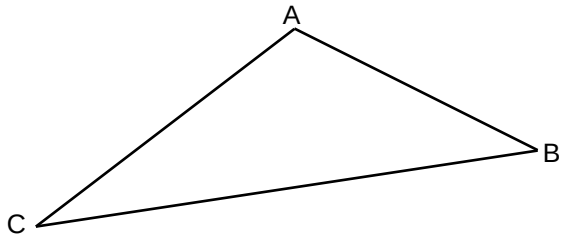


تنوّر

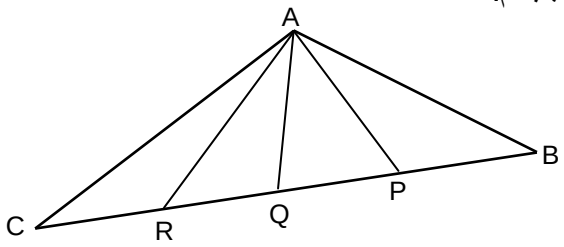
مهمّة: ورثة قطعة أرض.

أورث أب أبنائه الأربعة قطعة أرض مستوية شكلها مثلّث رؤوسه هي A، B، C وأمرهم تقسيمها لأربعة أقسام متساوية.

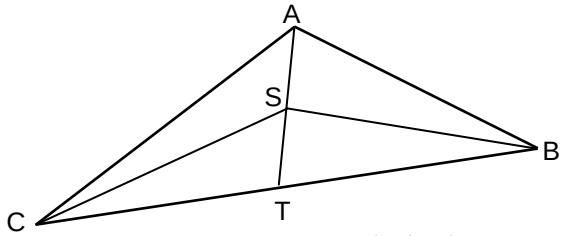
كل واحد من الأبناء أقترح طريقة مختلفة لتقسيم المساحة.



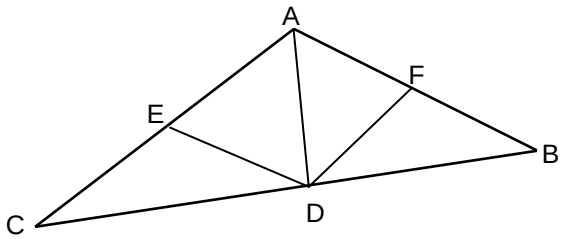
أ. اقترح راني تقسيم الضلع BC لأربع قطع متساوية. نقاط التقسيم P، Q و-R موصولة مع الرأس A بحيث ينتج أربعة مثلّثات داخل المثلّث الأصلي (أنظروا الرسم). حدّدوا هل اقتراح راني يقسم المساحة لأربعة أجزاء متساوية، فسّروا إجابتكم.



ب. اقترح شادي أن يمرّر من A متوسط AT على الضلع BC . من النقطة S التي في منتصف المتوسط AT مدّ شادي قطعتين للرأسين B، و C (أنظر الرسم). حدّدوا هل اقتراح شادي يقسم المساحة لاربعة أجزاء متساوية، فسّروا اجابتكم.

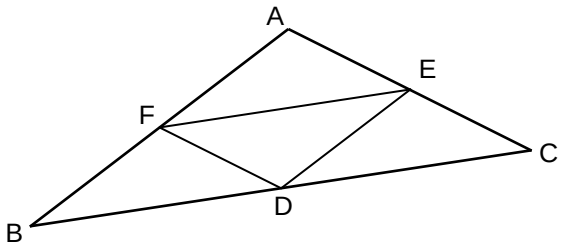


ت. اقترح لؤي أن يرسم ارتفاعا AD على الضلع BC، ومتوسطان DE و DF على الضلعين AC و-AB. حدّدوا هل اقتراح لؤي يقسم المساحة لاربعة أجزاء متساوية، فسّروا اجابتكم.

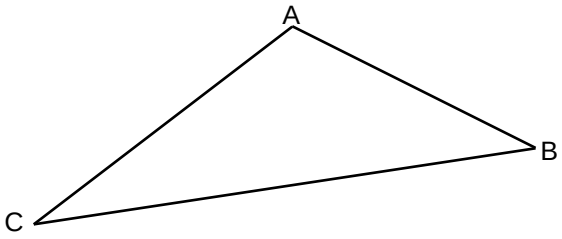


*ث. اقترح عماد أن يوصل بين منتصفات الأضلاع الثلاث (أنظروا الرسم).

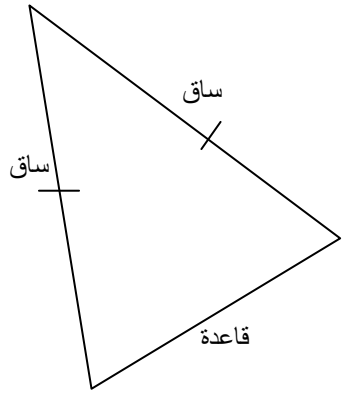
حدّدوا هل اقتراح عماد يقسم المثلّث إلى 4 أجزاء متساوية في المساحة، فسّروا إجابتكم.



جـ. اقترحوا تقسيم آخر.

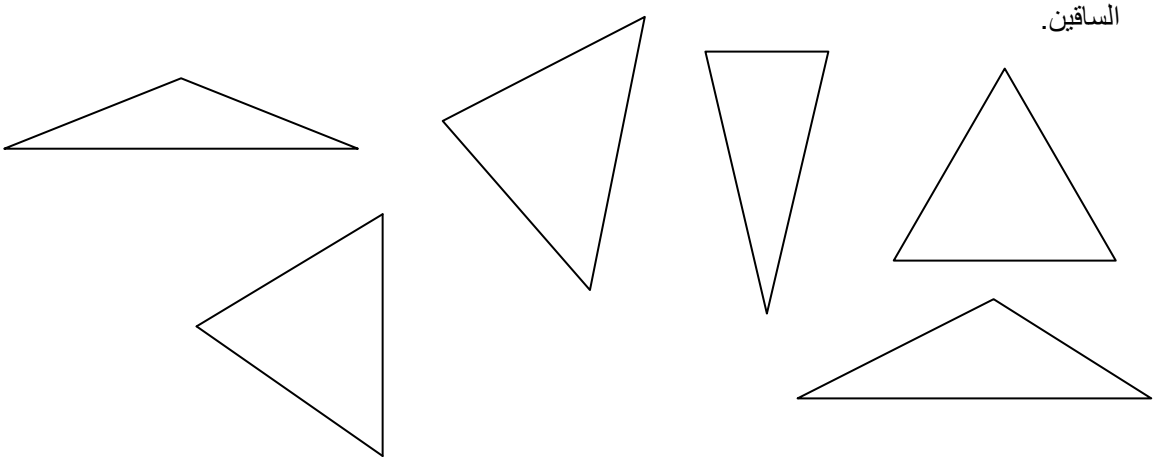


مثلّث متساوي الساقين

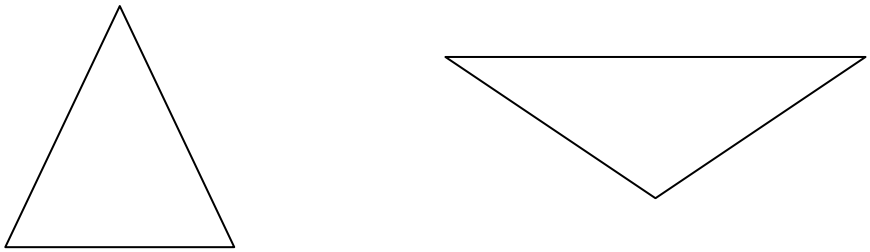


تعريف: مثلّث متساوي الساقين – مثلّث فيه ضلعين متساويين الأضلاع المتساوية تدعى **ساقان**، الضلع الثالث يدعى **قاعدة**.

1. أمامكم ستة مثلّثات. قيسوا بمساعدة المسطرة أطوال ألأضلاع وحدّدوا أي منها هي مثلثات متساوية الساقين.



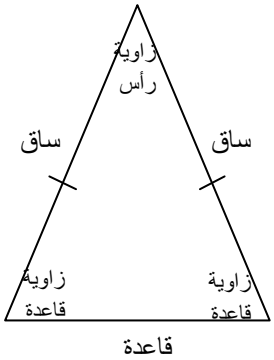
2. أمامك مثلثات متساوية الساقين. حدّدوا، بمساعدة المنقلة، مقدار الزوايا في المثلّثات المعطاة:



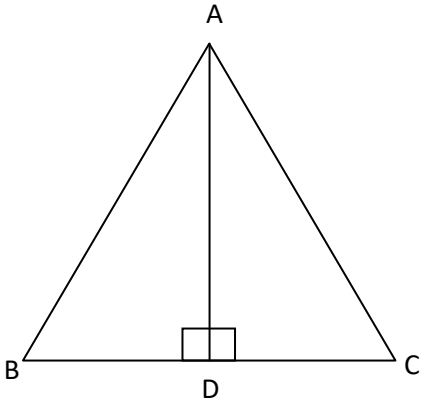
تعريف: زوايا في مثلّث متساوي الساقين –

زاوية الرأس هي الزاوية المحصورة بين الساقين

زوايا القاعدة هي الزوايا المحصورة بين القاعدة وكل واحد من الساقين.



3. أمامكم مثلّث ABC. الارتفاع AD على الضلع BC، مرسوم.



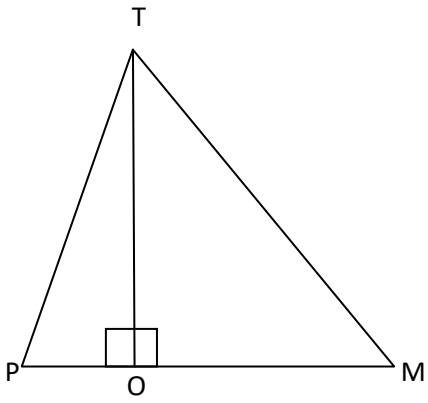
أ. افحصوا بمساعدة المسطرة هل المثلّث متساوي الساقين.

ب. قيسوا بمساعدة المنقلة مقدار الزاويتين BAD، CAD.

ت. قيسوا بمساعدة المنقلة مقدار الزاويتين B، C.

ث. قيسوا بمساعدة المسطرة طولي الضلعين BD، CD.

4. أمامك مثلّث TPM. الارتفاع TO على الضلع PM، مرسوم.



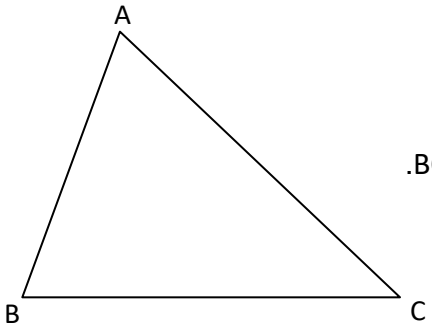
أ. افحصوا بمساعدة المسطرة هل المثلّث متساوي الساقين.

ب. قيسوا بمساعدة المنقلة مقدار الزاويتين PTO، MTO.

ت. قيسوا بمساعدة المنقلة مقدار الزاويتين P, M.

ث. قيسوا بمساعدة المسطرة طولي الضلعين MO، PO.

5. معطى مثلّث ABC .

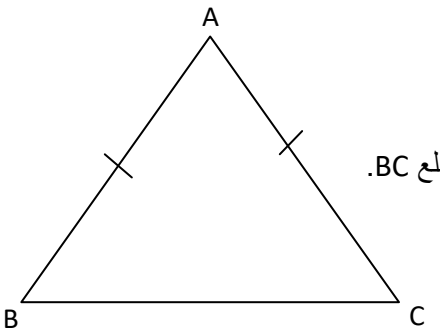


أ. ارسموا AD، منصّف الزاوية A.

ب. افحصوا بمساعدة مسطرة هل AD متوسّط للضلع BC.

ت. افحصوا بواسطة مسطرة مثلّثة أو منقلة هل AD هو ارتفاع على الضلع BC.

6. معطى مثلّث متساوي الساقين ABC (AC = AB).



أ. ارسموا AD، منصّف زاوية الرأس.

ب. افحصوا بواسطة المسطرة هل AD هو أيضًا متوسط للضلع BC.

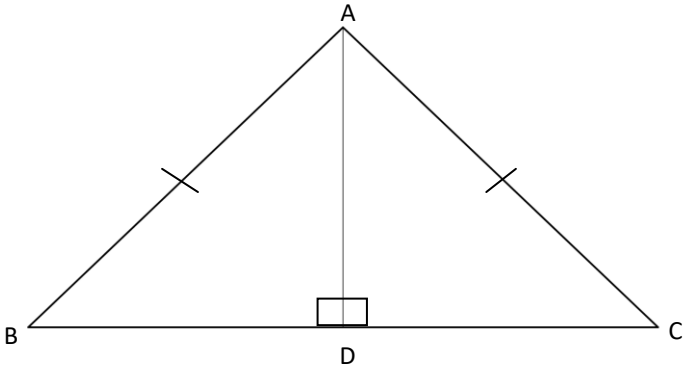
ت. افحصوا بواسطة مسطرة مثلّثة أو منقلة هل AD هو أيضًا ارتفاع على الضلع BC.

استعينوا في المثلث المتساوي الساقين في نهاية الكراس،

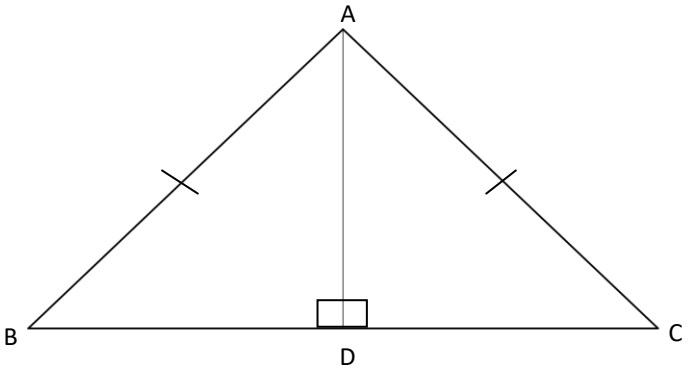
قصّوا **واطووا** خط التماثل في المثلّث. أشيروا إلى كل الأجزاء المتساوية.

نقاش: ما هو الفرق بين المثلّثين في البندين 5، 6؟

ما هو الفرق بين القطع في المثلثين في البندين 5، 6



7. معطى مثلّث متساوي الساقين ABC.



AD ارتفاع على القاعدة BC.

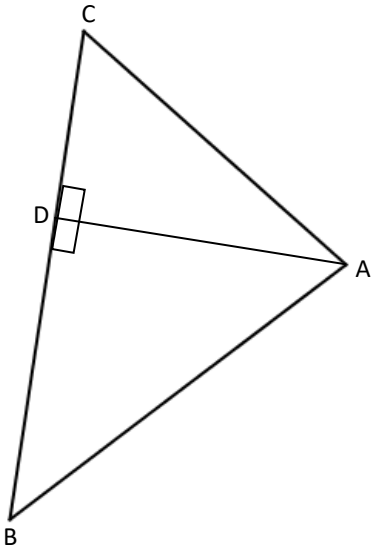
الزاويتين B، C متساويتين مقدارهما °42.

ما هو مقدار الزاويتين DAB

و- DAC؟

(استعينوا بالحسابات وليس بالقياس)

8. معطى مثلّث ABC.



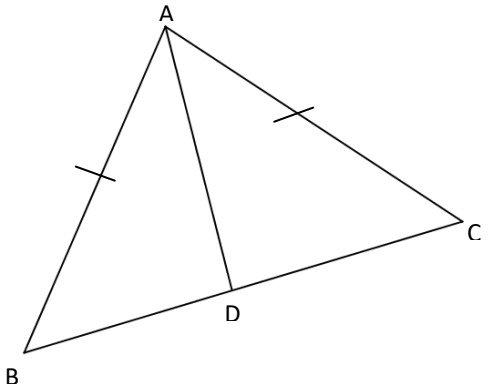
AD ارتفاع على الضلع BC.

$\sphericalangle B = 42°$، $\sphericalangle C = 58°$

ما هو مقدار الزاويتين DAB و- DAC؟

(استعينوا بالحسابات وليس بالقياس)

9. في المثلّث المتساوي الساقين أمامكم AC = AB



AD منصّف زاوية A.

معطى: $\sphericalangle A = 80°$

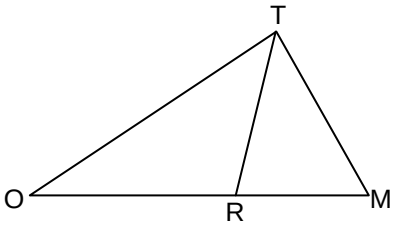
أي مثلّثين متطابقين؟ ولماذا؟

ماذا يجب أن يكون مقدار $\sphericalangle ADC$؟ فسّروا.

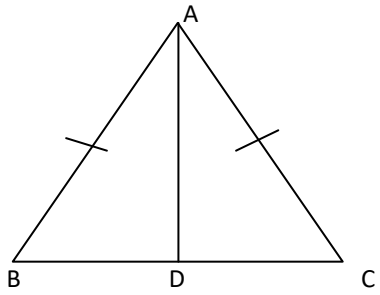
ماذا يجب أن يكون مقدار الزاويتين B و- C؟ فسّروا.

10. معطى مثلّث TOM. TR منصّف زاوية T. قيسوا وحدّدوا هل TR متوسّط على الضلع MO.

قيسوا وحدّدوا هل TR ارتفاع على الضلع MO.



11. **في المثلث المتساوي الساقين أمامكم** AC = AB و- AD منصّف الزاوية A.



$\sphericalangle A = \alpha$

أ. أي مثلثين متطابقين؟ أكملوا تفسيرات التطابق:

AC = AB لانّ _____

AD = AD لانّ _____

$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2 = \frac{\alpha}{2}$ لانّ _____

$\Downarrow$

_____ حسب نظرية التطابق _____

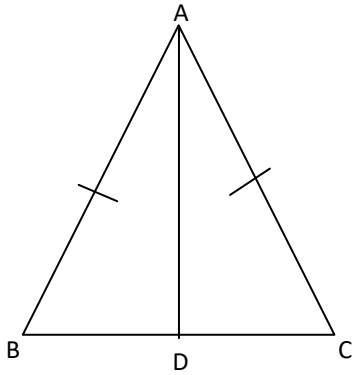
ب. أكملوا: _____ = $\sphericalangle B$

ت. أكملوا النظرية: في المثلّث المتساوي الساقين زاويتا القاعدة _____

ث. أكملوا: °____ = _____ = $\sphericalangle BDA$, ____ = BD

جـ. أكملوا النظرية: في المثلّث المتساوي الساقين منصّف زاوية الرأس يتطابق مع _____ ومع _____

12. في المثلّث المتساوي الساقين أمامكم AC = AB و- AD متوسّط على الضلع BC.



أ. أي مثلّثين متطابقين؟ أكملوا التفسيرات للتطابق:

AC = AB لانّ _____

AD = AD لانّ _____

BD = DC لانّ _____

$\Downarrow$

_____ حسب نظرية التطابق _____

ب. أكملوا:

$\sphericalangle B$ = _____

$\sphericalangle BAD$ = _____

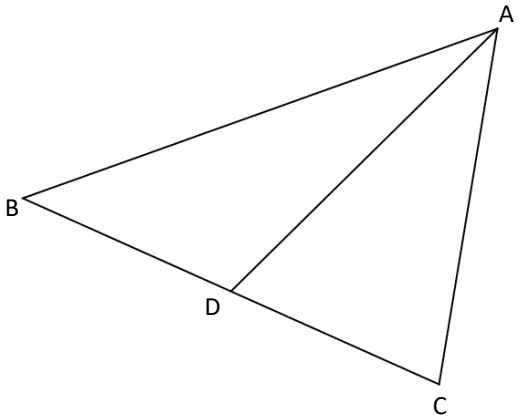
°____ = _____ = $\sphericalangle BDA$

نظريات تم برهنتها:

- في المثلّث المتساوي الساقين زاويتا القاعدة متساويتان.

- في المثلّث المتساوي الساقين منصّف زاوية الرأس يتطابق مع الارتفاع على القاعدة والمتوسّط على القاعدة.

13. في المثلث ABC القطعة AD هي متوسّط على الضلع BC.

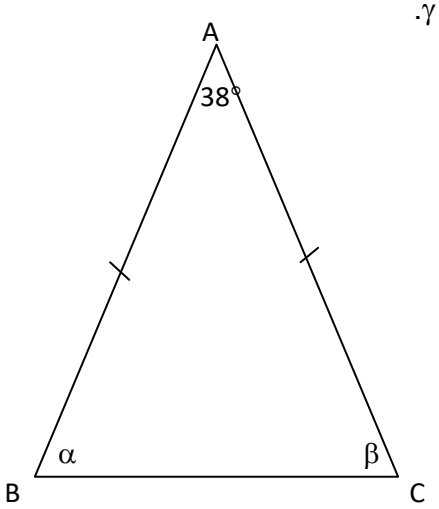


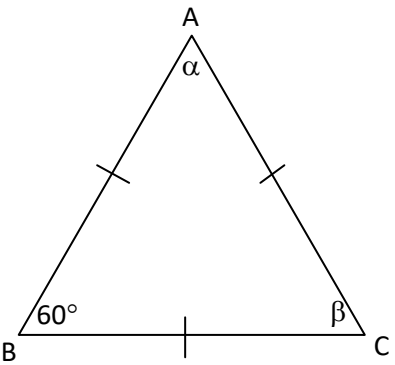
أ. هل يتطابق المثلّثان ABD و- ACD ؟ فسّروا.

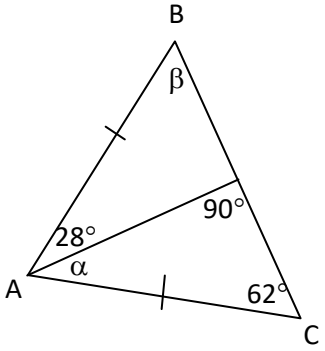
ب. هل مساحتا المثلّثين ABD و- ACD متساويتان؟ فسّروا..

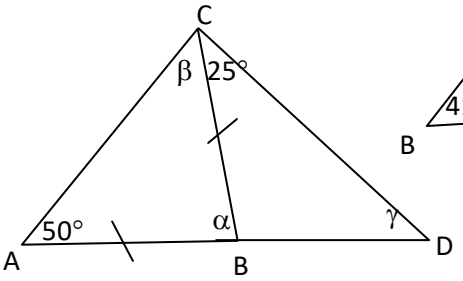
ت. هل محيطا المثلّثين ABD و- ACD متساويان؟ فسّروا.

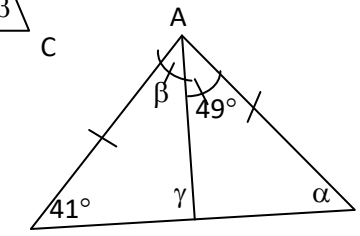
14. أمامكم مثلّثات متساوية الساقين ABC. الأضلاع المتساوية والزوايا المتساوية مشار إليها. حدّدوا بناءا على المعطيات في الرسم وبواسطة الحسابات، مقدار الزوايا المشار إليها بـ α, β, γ.

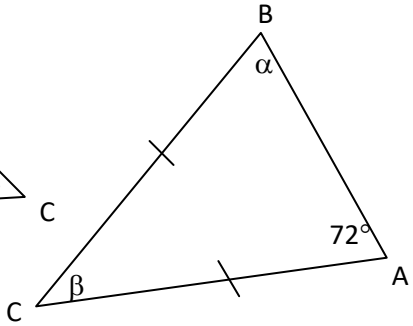


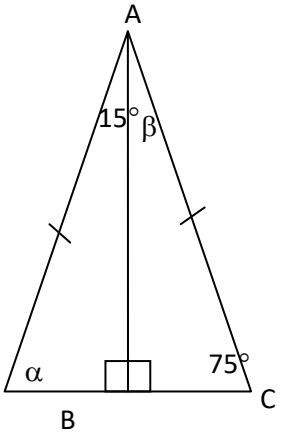




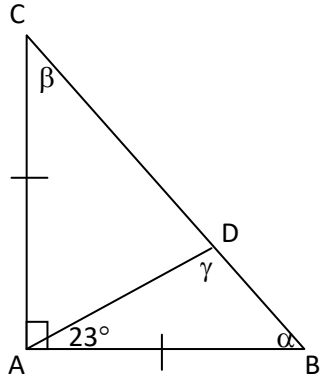


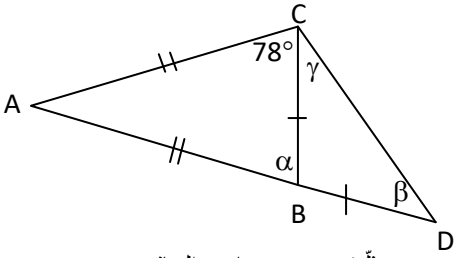






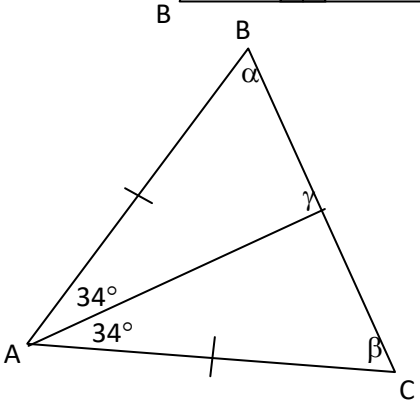
A، B، D تقع على خط مستقيم





مثلّث BCD متساوي الساقين

A، B، D تقع على خط مستقيم واحد



15. هل من الممكن أن تكون زاويتا القاعدة في مثلّث متساوي الساقين حادتين؟ فسّروا.

16. هل من الممكن أن تكون زاويتا القاعدة في مثلّث متساوي الساقين قائمتين؟ فسّروا.

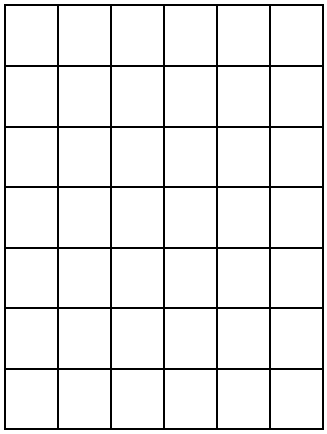
17. هل من الممكن أن تكون زاويتا القاعدة في مثلّث متساوي الساقين منفرجتين؟ فسّروا.

18. على أي مثلّث نحصل عندما يكون مقدار زاوية الرأس لمثلّث متساوي الساقين هو $60°$؟

19. على أي مثلّث نحصل عندما يكون مقدار زاوية القاعدة في مثلّث متساوي الساقين هو $45°$؟

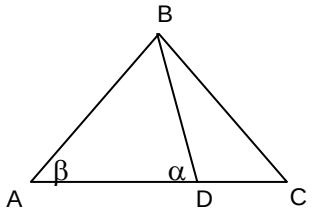
20. هل كل المثلّثات المتساوية الساقين، والتي أطوال ساقاها متساوٍ هي متطابقة؟ فسّروا.

21. طول ضلع كل مربّع من المربعات الصغيرة هو 1 سم. ارسموا مثلّث متساوي الساقين طول قاعدته 4 سم وارتفاعه 5 سم.



22. أ. المثلّث ABC هو مثلّث متساوي الساقين. D نقطة على القاعدة AC.

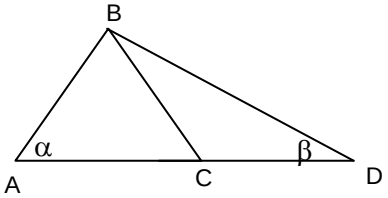
فسّروا لماذا $\alpha > \beta$.



ب. المثلّث ABC هو مثلّث متساوي الساقين.

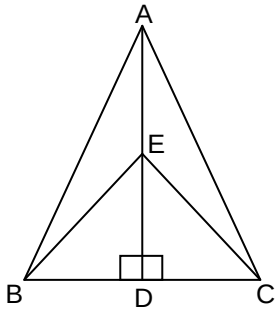
D نقطة على امتداد الضلع AC.

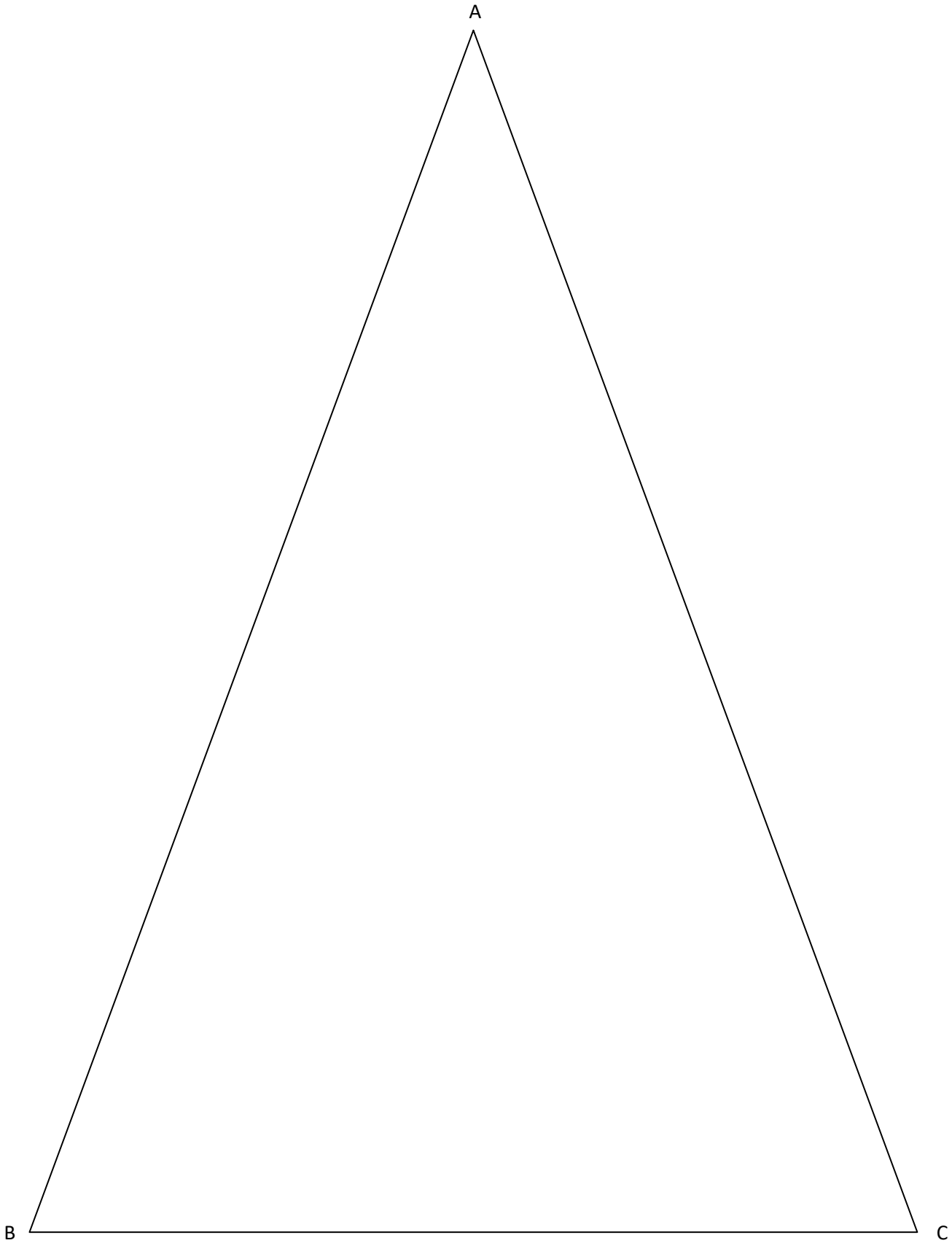
فسّروا لماذا $\alpha > \beta$.



*21. مثلّث ABC هو مثلّث متساوي الساقين $(AB = AC)$ ، $AD \perp BC$

استعينوا بتطابق المثلّثات حتى تفسّروا لماذا BEC هو مثلّث متساوي الساقين.




A
B
C